ENERGIA E LAVORO

Nuova grandezza scalare connessa alle interazioni tra i corpi: $\boxed{\text{Energia}}$

Si introduce a partire dal concetto di Lavoro delle Forze

e in meccanica si presenta come en. cinetica ed en. potenziale

Lavoro = forza x spostamento
dipende in genere dalla linea - percorso
eccetto che nei campi conservativi → en. potenziale

Leggi della dinamica - lavoro → variazione en. cinetica
En. e lavoro dipendono dal sistema di riferimento

Se tutte le forze sono conservative

En. meccanica = cinetica + potenziale = cost.

Forze conservative: gravità - elastica

F. non conservative: attrito

Relazioni lavoro - energia forniscono una nuova prospettiva anche per i problemi della dinamica. Utilità pratica.

Regioni di accessibilità - en. potenziale

Equilibrio e stabilità

En. potenziale: interazione tra un corpo e il suo ambiente

* Con questo capitolo termina la meccanica del punto
I° esonero

01/04/2016

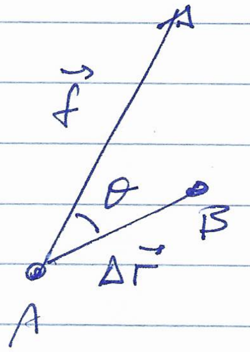
ENERGIA E LAVORO

Energia - leggi di conservazione - "consumo energetico"

Lavoro di una Forza

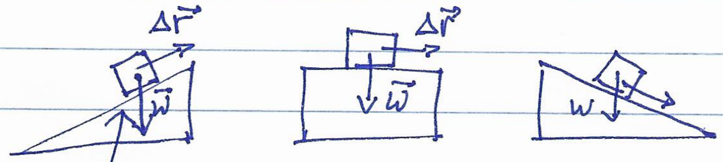
Dato $\vec{f}$ (costante nello spazio e nel tempo)

Lavoro: prodotto scalare della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione



$$L_{AB} = \vec{f}\cdot\vec{AB} = \vec{f}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \equiv \vec{f}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$L_{AB} \gtreqless 0$$



piano perfettamente liscio

$L_{AB} < 0$ $\quad$ $L = 0$ $\quad$ $L > 0$

$\vec{f} = \vec{w}$ $\quad$ $\theta > \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\theta < \frac{\pi}{2}$

Se la forza cambia con la posizione $\vec{f}(\vec{r}_0)$

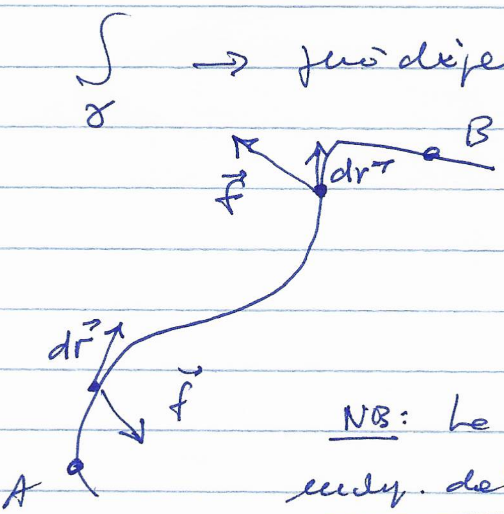
$$L_{AB} \approx \sum_i \vec{f}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

Lavoro elementare $\quad \delta L = \vec{f}\cdot d\vec{r}$

$$\boxed{L_{AB} = \int_{\gamma\,A}^{B} \vec{f}\cdot d\vec{r}} \quad ; \quad \delta L = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$L_{AB} = \int_{\gamma\,A}^{B} (f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \int_{\gamma\,x_A}^{x_B} f_x dx + \int_{\gamma\,y_A}^{y_B} f_y dy + \int_{\gamma\,z_A}^{z_B} f_z dz$$

$\int_\gamma$ → può dipendere dalla traiettoria



L è indip. da γ solo nel caso di forze conservative (che dipendono solo dalla posizione) iniziale e finale.

NB: Le ~~forze~~ forze di interazione tra corpi sono indip. dal riferimento ma la legge oraria lungo γ in genere dipende dal riferimento

→ In genere il lavoro varia con il riferimento.

Principio di indipendenza delle azioni simultanee.
Più forze f_i agiscono

$$L_{AB} = \int_{\gamma A}^{B} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma A}^{B} \sum_i \vec{f}_i \cdot dr = \sum_i \int_A^B \vec{f}_i\, d\vec{r}_i = \sum_i L_{AB}^i$$

Si può scegliere il modo più conveniente.

Dimensionalmente $L_{AB} \propto [L^2 M T^{-2}]$

L'unità di misura è il joule (J, SI) in CGS (erg)

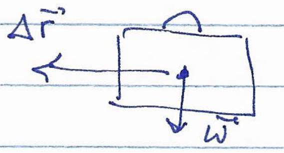
Un joule è il lavoro compiuto dalla forza di 1 newton quando il punto si sposta di un metro ($\parallel \vec{f}$)

$1\,J = 1\,m^2\,Kg\,s^{-2}$ (= 10^7 erg.)

Brindisi: 100 g × 1 m

$L = 0.1 \times 9.8 \times 1 \simeq 1\,J$

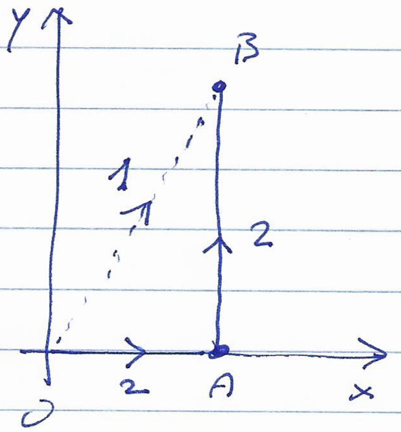
Problema: valigia ed esperienza comune



Tenere un peso fermo richiede energia alla persona. I muscoli sono più complessi degli oggetti.

[di forza non conservativa]

Esempio: Una forza dipende solo dalla posizione secondo la legge: $\vec{f} = axy\,\vec{i} + 3b\,\vec{j}$



Punti $O = (0,0,0)$; $B(3,6,0)$

$$L_1 = \int_{O\,(1)}^{B} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{(1)\,0}^{3} axy\,dx + \int_{(1)\,0}^{6} 3b\,dy = \int_0^3 ax(2x)\,dx + \int_0^6 3b\,dy \qquad (y = 2x)$$

$$= 2a\int_0^3 x^2\,dx + 3b\int_0^6 dy = 2a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 3b\left[y\right]_0^6 =$$

$$= 18a + 18b = \boxed{18(a+b)}$$

Percorso (2)

$$L_2 = \underset{(y=0)}{L_{OA}} + \underset{(x=3)}{L_{AB}} = \int_{(2)\,O}^{A} \vec{f}\cdot d\vec{r} + \int_{(2)\,A}^{B} \vec{f}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \underbrace{\int_{(2)\,0}^{3} axy\,dx + \int_{(2)\,0}^{0} 3b\,dy}_{L_{OA}} + \underbrace{\int_{(2)\,3}^{3} axy\,dx + \int_{(2)\,0}^{6} 3b\,dy}_{L_{AB}} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 3b\left[y\right]_0^6 = \boxed{18b} \longrightarrow L_1 \neq L_2 \quad (L_1 > L_2)$$

Calcolo di L_1 in forma parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \vec{r} = t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} \longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{f} = axy\,\vec{i} + 3b\,\vec{j} = 2at^2\,\vec{i} + 3b\,\vec{j}$$

$$L_1 = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^3 (2at^2 + 6b)\,dt = \left[\frac{2a}{3}t^3 + 6bt\right]_0^3 =$$

$$= 18a + 18b$$

[NB: Questa forza è abbastanza strana e non corrisponde ad un profilo di energia potenziale]

Energia Cinetica - Teorema delle Forze Vive

En. cinetica: applicando una forza ad un punto materiale si ha una variazione della velocità

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} F = ma \, ; \quad mv = Ft \\ x(t) = \frac{F}{m}\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{F}v^2 \\ F \cdot x = \frac{1}{2} m v^2 \end{array}\right]$$

Grandezza relativa dipende dal sistema di riferimento

$$\delta L = \vec{f} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = \boxed{m \vec{a} \cdot \vec{v} dt}$$

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \rightarrow dk = d\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \boxed{m \cdot \vec{v} \cdot \vec{a} \cdot dt}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta L = \delta K}$$

(*) Su un elemento infinitesimo della traiettoria il lavoro del risultante delle forze è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica

$$\int_{\gamma A}^{B} \delta L = \int_{\gamma A}^{B} dK \rightarrow \boxed{L_{AB} = K_B - K_A}$$

Teorema delle Forze Vive - (dal II° principio della dinamica)

TFV → Vale se la massa è costante

Caso in cui la massa non è costante

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\delta L = \left[m\underbrace{\left(\ddot{s}\,\vec{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{u}_n\right)}_{\vec{a}} + \underbrace{(\dot{s}\,u_t)}_{\vec{v}}\frac{dm}{dt}\right] \cdot \underbrace{(\dot{s}\,\vec{u}_t)\,dt}_{d\vec{r}_t}$$

Eseguendo i prodotti scalari

$$\delta L = m\ddot{s} \cdot \dot{s}\, dt + \dot{s}^2 dm \qquad (V)$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \rightarrow dK = m \dot{s} \cdot \ddot{s}\, dt + \frac{1}{2} \dot{s}^2 dm$$

da cui ne segue

$$\delta L = dK + \frac{1}{2} \dot{s}^2 dm$$

che esprime il Teorema delle Forze Vive nel caso di massa non costante.

Il T.F.V. è utile nei casi in cui la traiettoria è nota come in un sistema con vincoli (che non fanno lavoro) oppure quando il lavoro non dipende dalla traiettoria.

E' valido anche in rif. non inerziali purché si consideri anche il lavoro delle pseudo forze. NB. Coriolis non compie mai lavoro perché è sempre ⊥ alla velocità e quindi allo spostamento nel sistema non inerziale.

En. cinetica e lavoro possono essere mutuamente modulati. Si può sottrarre energia cinetica per ottenere lavoro e viceversa.

i.e. energia dal movimento dell'acqua - Fiumi

Aspetti distruttivi - incidenti stradali

Data l'equivalenza dimensionale tra lavoro ed energia anche questi si misura in Joule

En. totale emessa dal Sole in 1 giorno 3×10^{32} J.

Riserve mondiali fossili 3.18×10^{22} (?)

En ricevuta dalla Terra dal Sole (1 g) 1.5×10^{22}

Utilizzata in un anno nel mondo 5×10^{20}

Terremoto $\simeq 10^{15}$

1 Kg ^{235}U 9×10^{13} — 1 Tonnellata petrolio 4×10^{10}

1 KWh 3.6×10^6 — Persona che corre $5 \cdot 10^3$

Bruchi $\rightarrow$ 1

Legame nucleone 10^{-12}

Ionizzazione atomo H 2.2×10^{-18}

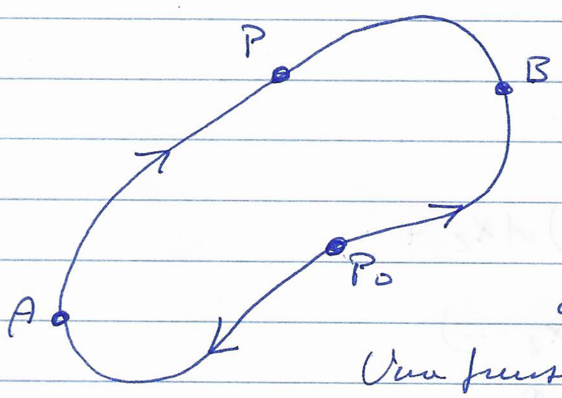
Campi di Forze Conservative

In generale il lavoro di una forza dipende dalla traiettoria
∃ una classe di forze per le quali il lavoro dipende soltanto dagli estremi del percorso → Forze Conservative

Condizione necessaria e sufficiente perché ciò accada è che esiste una funzione scalare della sola posizione $V(\vec{r})$ tale che

$$\boxed{\delta L = -dV}$$ il lavoro è un differenziale esatto

Giustificazione semplificata



$$L_{AB} = \int_A^B \delta L = -\int_A^B dV = V_A - V_B = -\Delta V$$

Viceversa se il lavoro è indipendente dal percorso è sempre possibile trovare una funzione $V(\vec{r})$ delle sole coordinate che soddisfi le relazioni precedenti

Una funzione di questo tipo è quella che vale 0 in P_0 $[V_0 = V(r(P_0)) = 0]$ e che in ogni altro punto è definita dal lavoro L_{P_0P}

$$V_P = -\int_{P_0}^{P} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -L_{P_0P}$$

Essendo $L_{P_0B} = L_{P_0A} + L_{AB}$ si ottiene

$$L_{AB} = (-L_{P_0A}) - (-L_{P_0B}) = V_A - V_B$$

da cui deriva la relazione differenziale per punti vicini

$$\boxed{V(\vec{r}) = \text{Energia potenziale}}$$

poi ∃ sempre una costante arbitraria che corrisponde alla scelta di P_0

Se il percorso è chiuso il lavoro è nullo $A=B \rightarrow V_A = V_B$

Per ogni linea chiusa

$$\oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$$ circuitazione di $\vec{f}$ lungo la curva γ.

Se esiste l'en. potenziale il lavoro elementare si può scrivere

$$\delta L = f_x dx + f_y dy + f_z dz = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{differenziale esatto}}}{dV} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Le componenti della forza sono connesse alle derivate parziali

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \\ f_y = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \\ f_z = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

$\boxed{\vec{f} = -\text{ il gradiente di } V}$

$$f = -\text{grad}\, V(x,y,z) = -\nabla V(x,y,z)$$

$$f = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\delta L = \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV$$

Ma come si può verificare che il lavoro sia indipendente da qualunque percorso?

Proprietà locale di una forza conservativa:

Se una forza è conservativa il rotore è identicamente nullo in ogni punto dello spazio

$$\nabla\times\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \equiv 0$$

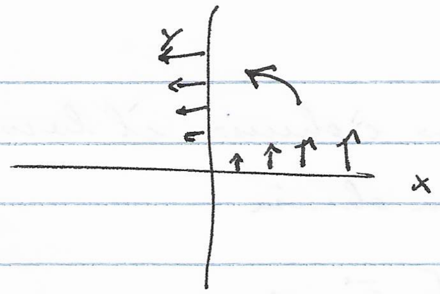
Infatti quando $\vec{f} = -\nabla V$ si ha $\cancel{\nabla}\times\nabla\times\nabla V = 0$

Condizioni anche sufficienti se l'insieme di definizione di $f_x\ f_y\ f_z$ è semplicemente connesso.

NO NO OK

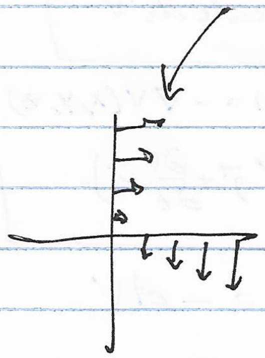
Linea chiusa si può contrarre in un punto

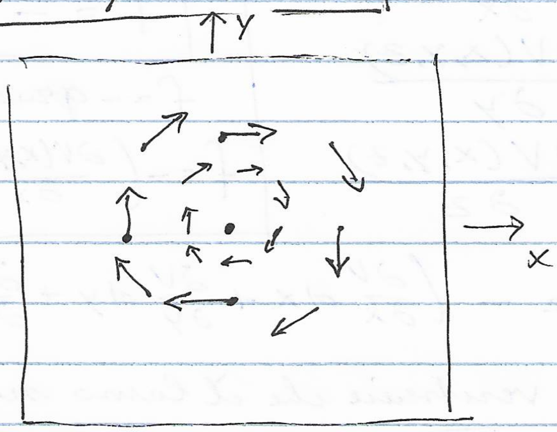
$$\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \longrightarrow$$



$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{F(x,y,z) = y\vec{x} - x\vec{y}}$$





Try $V(x,y)$ such that $f_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ $f_y = \frac{\partial V}{\partial y}$

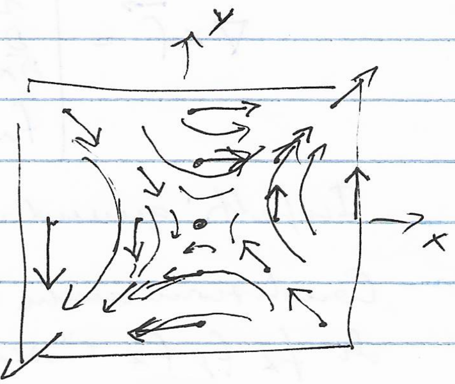
$$\int f_x dx = \int y\,dx = xy$$

$$\int f_y dy = \int (-x)\,dy = -xy$$

Impossible to define a potential

but not $\boxed{F(x,y) = y\vec{x} + x\vec{y}}$

$\boxed{V(x,y) = -xy}$ OK



NB: in one dimension most forces are conservative

Esempio precedente: non conservativa

$$\nabla\times\vec f = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy & 3b & 0 \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial(3b)}{\partial z}\right)\vec i + \left(0 - \frac{\partial(axy)}{\partial z}\right)\vec j +$$

$$+\left(\frac{\partial(3b)}{\partial x} - \frac{\partial(axy)}{\partial y}\right)\vec k = -ax\vec k \neq 0 \quad !$$

Modi equivalenti per definire un campo di forze conservativo:

(a) Il lavoro non dipende dal percorso

(b) $\oint \vec f\cdot d\vec r = 0$ per ogni possibile linea chiusa

(c) $\exists$ una funzione scalare (en. potenziale) tale che $L_{AB} = V(\vec r_A) - V(\vec r_B)$ indipendentemente da γ.

(d) $\nabla\times\vec f = 0$ (in un insieme semplicemente connesso)
(rot.)

Se un corpo si muove sotto l'azione di forze solo conservative l'en. cinetica ha lo stesso valore se il corpo passa nella stessa posizione

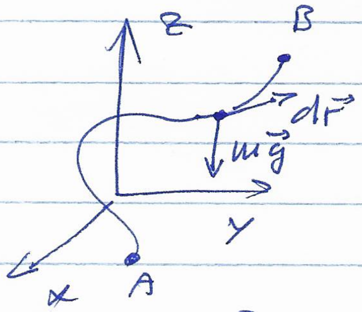
Campi di Forze conservativi

Dalla differenza del lavoro L_{AB} o da δL si possono determinare solo le differenze di en. potenziale e non i suoi valori assoluti

Forza peso

Campo uniforme $\vec f$ indip. da $\vec r$ è conservativo

$$L_{AB} = \int_{\gamma\, A}^{B} \vec f\cdot d\vec r = \vec f\cdot\int_{\gamma\, A}^{B} d\vec r = \underbrace{\vec f\cdot(\vec r_B - \vec r_A)}_{\text{indip. da } \gamma}$$



$$\vec{W} = m\vec{g}$$

$$\vec{f} = (0, 0, -mg) \qquad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\delta L = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -mg\,dz = -d(mgz)$$

$$L_{AB} = \int_{\gamma\,A}^{B} -mg\,dz = -mg\int_{\gamma\,A}^{B} dz = -mg(z_B - z_A) =$$

$$= mg(z_A - z_B)$$

indipendente dal percorso ma solo dalla quota.

Diff. di en. pot.:

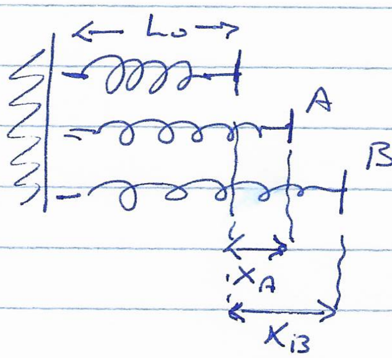
$$V_A - V_B = mg(z_A - z_B)$$

Tipicamente a $z=0$ si attribuisce $V=0$

$$\boxed{V = mgz}$$

05/04/2016

Forza elastica



$$\vec{f_c} = -kx\vec{i}$$

$$\vec{f_c} = (-kx, 0, 0) \qquad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\delta L = -kx\,dx = -d\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$L_{AB} = \int_A^B -kx\,dx = -k\tfrac{1}{2}(x_B^2 - x_A^2) = \tfrac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2)$$

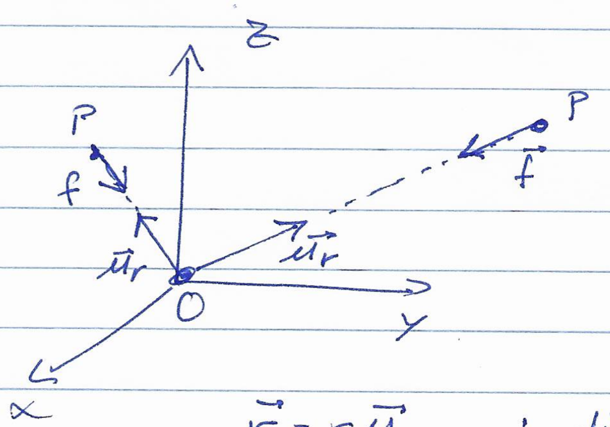
La forza elastica è conservativa

$$\boxed{\text{Check } \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0}$$

$$\boxed{V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

Energia elastica è non negativa e dipende dall'entità della deformazione ma non dal segno

Forze centrali a simmetria sferica



Forze gravitazionale e elettrostatica

$$\boxed{\vec f = f(r)\vec u_r}$$

r = distanza OP

$$\vec r = r\vec u_r \quad ; \quad d\vec r = dr\,\vec u_r + r\,d\vec u_r$$

$$\delta L = f(r)\vec u_r \cdot (dr\,\vec u_r + r\,d\vec u_r) = f(r)\,dr$$

[Con la condizione che $f(r)$ ammetta una primitiva

$P'(x) = f(x) \leftarrow$ primitiva $\quad \int f(x)\,dx = P(x) + C$

$\uparrow$ primitiva generica]

$$\delta L = f(r)\,dr = -dV(r) \rightarrow f(r) = -\frac{dV}{dr}$$

quindi le forze centrali a simmetria sferica sono conservative

$$V_A - V_B = \int_A^B f(r)\,dr$$

In termini delle componenti cartesiane della forza e dello spostamento

$$\vec u_r = \frac{1}{r}\vec r \qquad \vec u_r \equiv \left(\frac{x}{r} ; \frac{y}{r} ; \frac{z}{r}\right) \rightarrow \vec f = f(r)\vec u_r \equiv$$

$$\equiv \left(f(r)\frac{x}{r} ; f(r)\frac{y}{r} ; f(r)\frac{z}{r} \right)$$

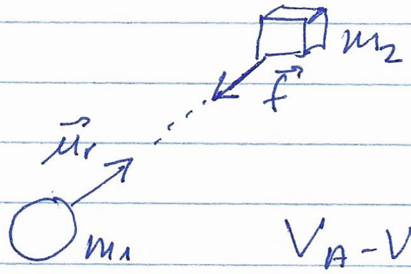
$$L_{AB} = \int_A^B \frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow 2r\,dr = 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

da cui $\quad L_{AB} = \int_A^B f(r)\,dr$

Forza di attrazione Gravitazionale

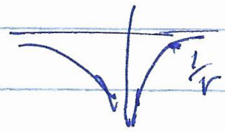
$$\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad (O \Leftrightarrow m_1)$$



$f(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ risulta conservativa

$$V_A - V_B = \int_A^B f(r)\,dr = \int_A^B -G \frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr =$$

$$= G m_1 m_2 \int_A^B -\frac{dr}{r^2} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$



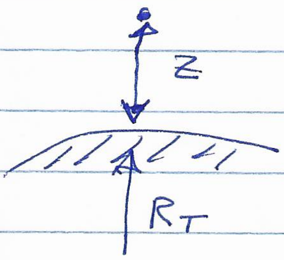
Normalmente si pone $V=0$ per $r \to \infty$

quindi: $\boxed{V(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}}$ potenziale gravitazionale.

Per le cariche elettriche si ha la legge di Coulomb

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \qquad \text{ma } q_i \gtrless 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \qquad \varepsilon_0 = \text{costante dielettrica (vuoto)}$$



Vicino alla superficie terrestre

$$V(R_T + z) = -G \frac{m M_T}{R_T + z} = -G \frac{m M_T / R_T}{1 + z/R_T} =$$

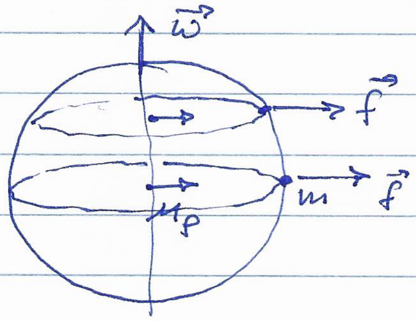
$$= -G \frac{m \cancel{R_T} M_T}{R_T} \frac{1 - z/R_T}{1 - (z/R_T)^2}$$

Se $z \ll R_T$ $\quad (R_T = 6.4 \times 10^6\,m)$

$$V(R_T + z) \approx -G \frac{m M_T}{R_T}\left(1 - \frac{z}{R_T}\right) = V(R_T) + m \frac{G M_T}{R_T^2} z =$$

$$= V(R_T) + mgz \rightarrow \cancel{V(z)} \boxed{V(z) = mgz}$$

Forza Centrifuga



Riferimento non inerziale rotante con $\vec\omega$ costante

Forza centrifuga (pseudoforza) $\boxed{\vec f = m\omega^2\rho\,\vec u_\rho}$

Forza assiale a simmetria cilindrica (non centrale)

$\vec f = f(\rho)\,\vec u_\rho$ Consideriamo il lavoro elementare della forza

ρ distanza dall'asse $\rho^2 = x^2+y^2$

$\rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy$

$$\delta L = f(\rho)\,\vec u_\rho\cdot d\vec r = f(\rho)\left(\frac{x}{\rho}\vec i + \frac{y}{\rho}\vec j\right)(dx\,\vec i + dy\,\vec j + dz\,\vec k)$$

$$= \frac{f(\rho)}{\rho}(x\,dx + y\,dy) = f(\rho)\,d\rho$$

$$\cancel{L_{AB} = \int_A^B f(\rho)\,d\rho = L(\rho_B) - L(\rho_A)}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B m\omega^2\rho\,d\rho = m\omega^2\int_A^B \rho\,d\rho = \frac{m\omega^2}{2}\left(\rho_B^2-\rho_A^2\right)$$

$\vec f = 0$ per $\rho = 0$ $\boxed{V(\rho) = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2}$

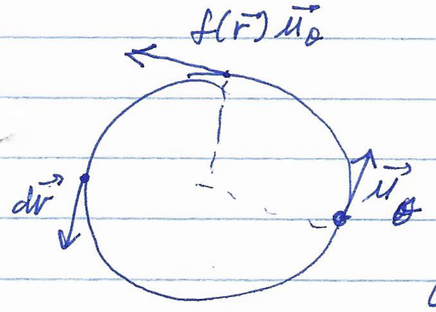
(avendo assunto che $\vec\omega$ = cost.)

Forza	En Pot.	Punto E=0	Lavoro elementare
Peso	mgz	$z=0$	$-mg\,dz$
Elastica	$\frac{1}{2}kx^2$	$x=0$	$-kx\,dx$
Gravitaz.	$-G\frac{m_1m_2}{r}$	$r=+\infty$	$-G\frac{m_1m_2}{r^2}dr$
Centrifuga	$-\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$	$\rho=0$	$m\omega^2\rho\,d\rho$

Il fatto che le forze centrali a simmetria sferica sono conservative dipende da due fattori:

1. Forza centrale - direzione radiale
2. Il modulo dipende solo da r (simmetria sferica)

Se queste condiz. non sono verificate le f. possono non essere conservative.

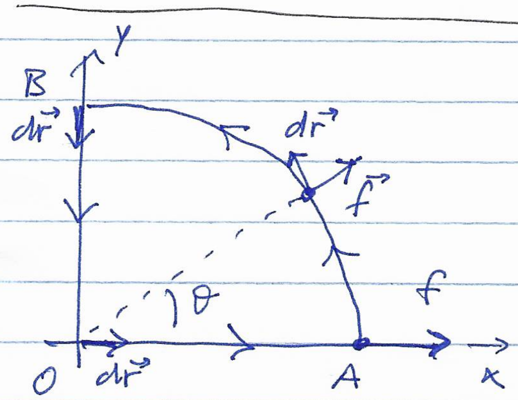


i.e. $\vec{f} = f(r)\vec{u}_\theta$ ~~non~~ non è conservativa

In ogni punto forza e spostamento elementare hanno la stessa direzione e verso

$$L_\gamma = \oint_\gamma f(r)\vec{u}_\theta \cdot d\vec{r} = f(r)\oint_\gamma \vec{u}_\theta \cdot d\vec{r} =$$

$$= \oint_\gamma ds = f(r)\, 2\pi R \neq 0$$



$\vec{f} = f(r)\cos\theta\, \vec{u}_r$

Circuitazione lungo il percorso $\circlearrowleft OABO$

$$L_{OA} = \int_O^A f(r)\cos\theta\, \vec{u}_r \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{r_A} f(r)\, dr$$

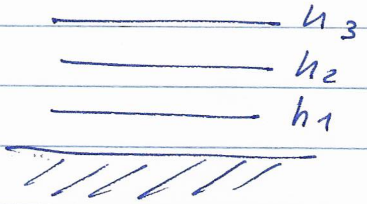
$L_{AB} = 0 \qquad \vec{f} \perp d\vec{r}$

$L_{BO} = 0 \qquad \cos\theta = 0 \qquad$ ma $L_{OA} \neq 0$

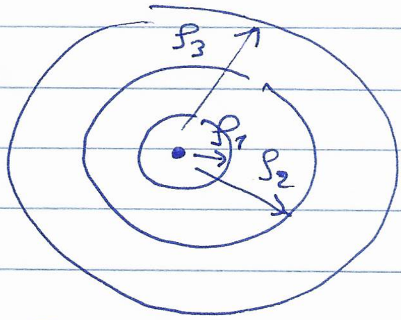
quindi è non conservativa

Superfici equipotenziali

$\vec{f}$ è $\perp$ alla superficie equipotenziale



Forza peso



Forza gravitazionale

Forze non conservative

Attrito radente $\vec{R}_t = -\mu_d R_n \vec{u}_v$

versore della velocità

Generalmente per ~~una~~ piano
R_n e $\mu_d \approx cost$

La direzione è variabile in quanto è opposta a quella istantanea del moto.

$$L_{AB} = \int_{A\,(\gamma)}^{B} \vec{R}_t \cdot d\vec{r} = \int_{A\,(\gamma)}^{B} -\mu_d R_n \vec{u}_v \cdot d\vec{r} = -\mu_d R_n \int_{A\,(\gamma)}^{B} \vec{u}_v \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt = v \vec{u}_v dt \rightarrow \vec{u}_v \cdot d\vec{r} = v \cdot dt$$

$$L_{AB} = -\mu_d R_n \int_{A\,(\gamma)}^{B} \underbrace{v \cdot dt}_{\text{sempre} \geq 0} = -\mu_d R_n \, l_{AB}^{(\gamma)}$$

$l_{AB}^{(\gamma)}$ è la lunghezza del percorso effettuato per andare da A a B lungo γ.

Il lavoro fatto dall'attrito è sempre negativo anche nel caso di una curva chiusa

Forza di attrito è non conservativa

Forza di Stokes $\vec{f}_R = -\beta \vec{v}$

$d\vec{r} = \vec{v}\, dt$

$$L_{AB} = \int_{\gamma A}^{B} \vec{f}_R \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma A}^{B} -\beta \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\beta \int_{\gamma A}^{B} \underbrace{v^2 dt}_{\text{sicuramente} > 0}$$

Quindi il lavoro è sempre < 0

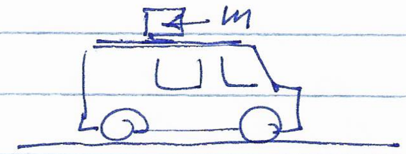
F. d. S. è non conservativa

NB: Il fatto che $L < 0$ per attrito vale solo nel sistema del piano o del mezzo.

Infatti nell'espressione c'è il verso della vel. relativa

Se cambiamo riferimento L può essere > 0

es. Camioncino con corpo sul cassone



Rispetto alla strada il corpo viene accelerato quindi l'attrito statico o dinamico compie un lavoro positivo.

Conservazione dell'energia meccanica

Teorema delle Forze Vive in termini differenziali

$$\delta L = dK$$

di validità generale per i corpi a massa costante

Il lavoro di una forza conservativa si può esprimere in termini di variazioni dell'energia potenziale

$$\delta L = -dV$$

Se tutte le forze sono conservative

$$\delta L = \sum_i (-dV_i) = -d\left(\sum_i V_i\right) \equiv -dV$$

$V = \sum_i V_i$ = energia potenziale totale

quindi: $dK = -dV \rightarrow d(K+V) = 0$

$$\boxed{K+V = \text{costante}}$$

$E_M = K + V$ = <u>energia meccanica</u> (totale)

K : connessa al moto del punto materiale

V : interazioni con l'ambiente

dipende dal rif. inerziale
mentre V è dovuta alle forze relative indip. dal Rif.

Se tutte le forze sono conservative l'en. meccanica è costante

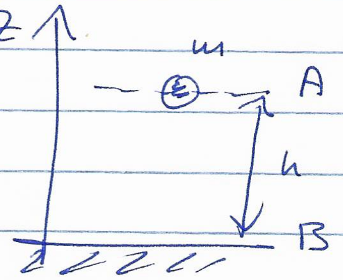
$$dE_M = 0$$

Nel caso di forze <u>miste</u>

$$dK = \delta L = \delta L^{(c)} + \delta L^{(nc)} = -dV + \delta L^{(nc)}$$

$dE_M = \delta L^{(nc)}$ La variazione di E_M è dovuta solo alle forze non conservative

Rispetto al II° principio della dinamica questo tipo di equazioni possono essere più semplici (no derivata seconda). Utilizzare solo il modulo della velocità e non la legge oraria i.e. Corpo di massa m che cade da una altezza h



Velocità al momento dell'impatto col suolo

$$E_M = K_A + V_A = K_B + V_B$$

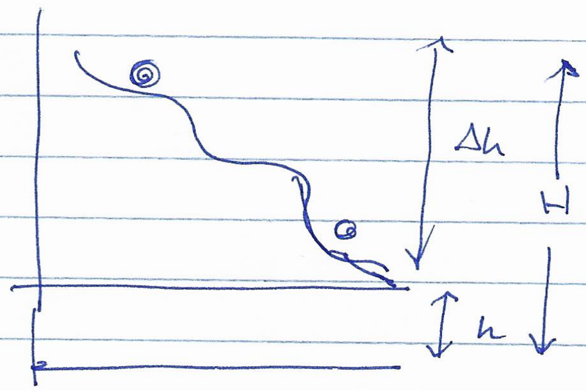
$K_A = 0 \quad V_A = mgh$

$K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad V_B = 0$

$$E_M = mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \longrightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

In conclusione:

1. Per alcuni problemi la conservazione dell'energia meccanica può essere conveniente rispetto all'eq. del moto
2. Tale conservazione contiene l'eq. fondamentale del moto, che a volte può essere ricostruita



Difficile usare $\vec{f} = m\vec{a}$

$$E_M(i) = mgH$$

$$E_M(f) = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$

$$mgH = \frac{1}{2} m v^2 + mgh \longrightarrow v^2 = 2g\,\Delta h \longrightarrow v = \sqrt{2g\,\Delta h}$$

06/04/2016

Lavoro e potenza dissipata da un oscillatore armonico

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$$

$$x(t) = x_0 \cos((\omega t) - \varphi)$$

$$x_0 = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{m^2}}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad ; \quad \omega_0 = k/m$$

La forza applicata è $f(t) = F\cos\omega t$

Calcoliamo il lavoro medio in un periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar{L} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} F(\cos\omega t) \cdot dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{T_0} F\cos(\omega t)\frac{dx}{dt}dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_0\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

$$\bar{L} = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} F x_0 \cos(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)\, d(\omega t) =$$

$$= -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} F x_0 \cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)\, d\alpha \quad ; \quad \alpha = \omega t$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \underline{\cos\alpha\sin\varphi}$$

[parte immag. se si usa $e^{i\omega}$]

(sin α dispari in α
cos α pari in α)

$$\bar{L} = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} F x_0 \overbrace{\sin\alpha\cos\varphi\cos\alpha\, d\alpha}^{0} +$$

$$+\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} F x_0 \cos^2\alpha \sin\varphi\, d\alpha$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha = \pi$$

quindi

$$\boxed{\bar{L} = \frac{\omega F x_0}{2}\sin\varphi}$$

L'energia che viene applicata all'oscillatore è quella che serve per compensare la dissipazione dovuta a β.

La sua energia meccanica totale è costante

→ spettroscopia - assorbimento di energia

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad k = m\omega_0^2$$

$$f(t) = F e^{i\omega t}$$

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\omega x_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 m x_0 \cancel{e^{i\omega t}} + i\omega x_0 \beta \cancel{e^{i\omega t}} + k x_0 \cancel{e^{i\omega t}} = F \cancel{e^{i\omega t}}$$

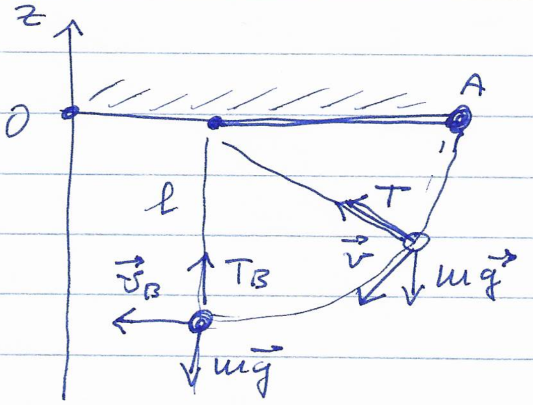
$$x_0(-m\omega^2 + i\omega\beta + k) = F$$

$$x_0\left[m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\beta\right] = F$$

$$x_0 = \frac{F\,\left[m(\omega_0^2-\omega^2) - i\omega\beta\right]}{\left[m(\omega_0^2-\omega^2) + i\omega\beta\right]\left[m(\omega_0^2-\omega^2) - i\omega\beta\right]} =$$

$$= \frac{F\left[m(\omega_0^2-\omega^2) - i\omega\beta\right]}{\left[m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\right]}$$

Pendolo semplice



Inizialmente in A
Calcolare v_B e T_B

$$E_M = K + V = \frac{mv^2}{2} + mgz$$

$K_A = 0$; $z_A = 0$; $E_M = 0$

$$E_M(B) = \frac{mv_B^2}{2} + mgz_B = 0$$

$$v_B^2 = -2gz_B = 2gl \rightarrow v_B = \sqrt{2gl}$$

Il modulo della velocità in B è lo stesso che avrebbe un corpo libero che cade.

Il filo non compie lavoro ma cambia la ~~di~~ direzione della velocità

In B la componente centripeta dell'accelerazione è

$a_c = \frac{v_B^2}{l}$ e quindi è $\frac{2gl}{l} = 2g$ $\quad f_c = 2mg$

$$T_B - mg = \frac{mv_B^2}{l} \rightarrow T_B = mg + 2mg = \boxed{3mg}$$

E_M nei problemi unidimensionali

Se la traiettoria è fissa il problema si riduce effettivamente ad un problema unidimensionale (i.e. montagne russe)

Traiettoria $\vec{r}(s)$ con s ascissa curvilinea, $s(t)$ legge oraria

Basta una sola eq. del moto.

$V(s) = V(\vec{r}(s))$ un potenziale

$$E_M = K + V = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V(s) = cost$$

derivando rispetto a t

$$m \dot{s} \ddot{s} + \frac{dV(s)}{ds} \dot{s} = 0$$

da cui $\dot{s} = 0$ non c'è moto, oppure

$$\boxed{m \ddot{s} = - \frac{dV(s)}{ds}}$$ — eq. del moto segue dalla conservazione di E_M

eq. del moto lungo la traiettoria –

Forza elastica $\quad \vec{f}(x) = -kx\vec{i}$

Verificare che la conservazione di E_M contiene l'eq del moto

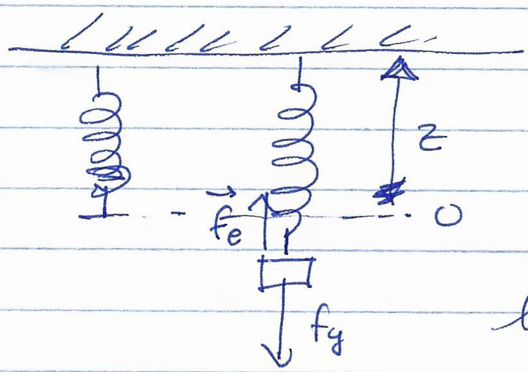
$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2$$

$$m \ddot{x} = - \frac{dV(x)}{dx} = -kx \qquad \frac{\partial E_M}{\partial t} = 0$$

$$\cancel{m\ddot{x} + kx}$$

$$m \ddot{x} \cancel{\dot{x}} + k x \cancel{\dot{x}} = 0$$

Caso di più forze conservative



$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_e$$

$$V(z) = mgz + \frac{k}{2} z^2$$

l'eq. del moto è

$$m \ddot{z} = f_z = - \frac{dV(z)}{dz} = -mg - kz$$

$f_z = 0$ per $z^* = -mg/k$ $\qquad mg = -kz^*$

$$V(z) = \frac{1}{2} k z^2 - k z z^*$$

$$V(z^*) = -\frac{1}{2} k z^{*2}$$

$$V(z) - V(z^*) = \frac{1}{2} k (z^2 + z^{*2} - 2 z z^*) = \frac{1}{2} k (z - z^*)^2$$

cioè attorno all'equilibrio si ha ancora un oscillatore armonico

Vicino a $z = z^*$ $\qquad f_s = -\frac{dV}{dz} = -k(z - z^*)$

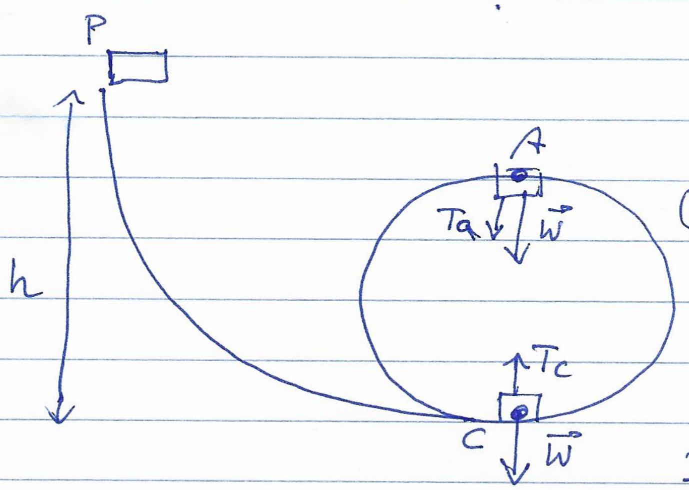
quindi in generale (in 1d)

$$V(x) \simeq V(x_0) + \alpha (x - x_0)^2$$

con $\alpha > 0$, nel punto $x = x_0$ equilibrio.

Equilibrio stabile $f(x) = -2\alpha(x - x_0)$

Scivolo e giro della morte



(a) caso di punto che scivola

(b) punto vincolato (rotaia) vincolo bilaterale

(caso b) $h_1 = 2R$ per fare il giro

Nel caso (a) che in ogni istante ci sia una reazione vincolare T

In ogni punto

$$\vec W + \vec T = m \vec a$$

in A: $\quad mg + T_A = m \frac{v_A^2}{R}$

Caso limite $T_A = 0 \rightarrow v_A = \sqrt{gR}$ minimo valore per non staccarsi

Conservazione di EM fra P e A

$$K_P + V_P = K_A + V_A \to 0 + mgh_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R$$

con $v_A = \sqrt{gR}$ si ottiene $h_2 = \frac{5}{2}R$

Per evitare il distacco la quota deve essere $> 2R$

Al punto C (en. pot = 0)

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg\left(\frac{5}{2}R\right) \to v_C^2 = 5gR$$

$$-mg + T_C = m\frac{v_C^2}{R} = m\frac{5gR}{R} \Rightarrow \boxed{T_C = 6mg}$$

Nel giro della morte quindi l'acc. è 5g oltre la gravità.
Circa lo stesso accade quando un aereo acrobatico fa il giro della morte (indipendentemente dal raggio del giro).

NB: Lavoro, en. cinetica e en. meccanica dipendono dal sistema di Rif.
Può succedere che forze che non fanno lavoro in un Rif. lo fanno in un altro Rif (attrito statico o reazioni vincolari)

L'en. meccanica quindi può conservarsi in un sistema e non conservarsi in un altro.

Energia negli oscillatori (trasformismo)

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\cancel{\varphi_0 = \omega t + \varphi_0}$

$\varphi = \omega t + \varphi_0$

$V(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2\varphi$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\varphi$

$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2\varphi(t)$

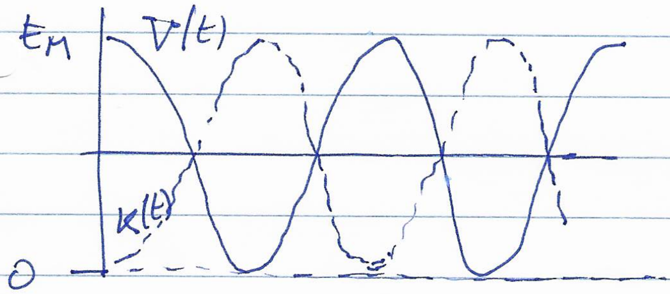
In ogni istante l'en. meccanica totale è

$$E_M = V(t) + K(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2\varphi(t) + \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2\varphi(t)$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

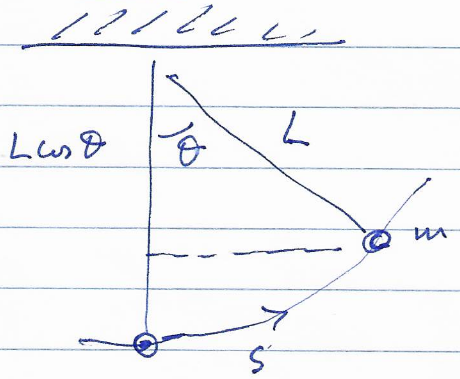
$$E_M = \frac{1}{2} k A^2 \left[\cos^2\varphi(t) + \sin^2\varphi(t)\right] = \frac{1}{2} k A^2$$

L'energia oscilla continuamente tra cinetica e potenziale



L'en. totale è il max di uno dei due.

Pendolo semplice



Per piccole oscillazioni

$s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

è quindi analogo all'oscillatore armonico

$v_s = \dot{s}$

$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m S_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$z = 0 \; ; \; \theta = 0$

$z = L - L\cos\theta \rightarrow V(\theta) = mgz = mgL(1-\cos\theta)$

$\theta << 1 \rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \theta = \frac{s}{L}$

$V(\theta) \approx \frac{mgL\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{mg}{L} S_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$E_M = V(t) + K(t) \simeq \frac{1}{2}\frac{mg}{L} S_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m S_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$E_M = V(t) + K(t) \approx \frac{1}{2}\frac{mg}{L} S_0^2 [\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)] =$

$= \frac{1}{2}\frac{mg}{L} S_0^2$

L'oscillazione dell'en. tra la potenziale e cinetica vale anche per grandi oscillazioni ma le precise dipendenze temporali sono più complesse.

Punto in lungo z soggetto a $\vec{f}_g$ e $\vec{f}_e$, molla di costante k, con origine a $z = 0$

A $t=0$ il punto è lasciato in $z=0$ con $v=0$

Oscillatore che ha come centro la coordinata $z = z^* = -mg/k$

$z(t) = z^* + A\cos(\omega t + \varphi) \; ; \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A e φ sono da determinare in base alle condizioni iniziali

$t=0, z=0 \rightarrow \varphi = 0$ e $A = -z^* = mg/k$

quindi $\quad z(t) = z^*(1-\cos(\omega t))$

$z(t) = z^*(1-\cos\omega t)$

$\dot z(t) = z^* \sin\omega t$

~~121~~ 121

+ Sin

$\cancel{\dot z = z^*[1-\cos(\omega t)]}$

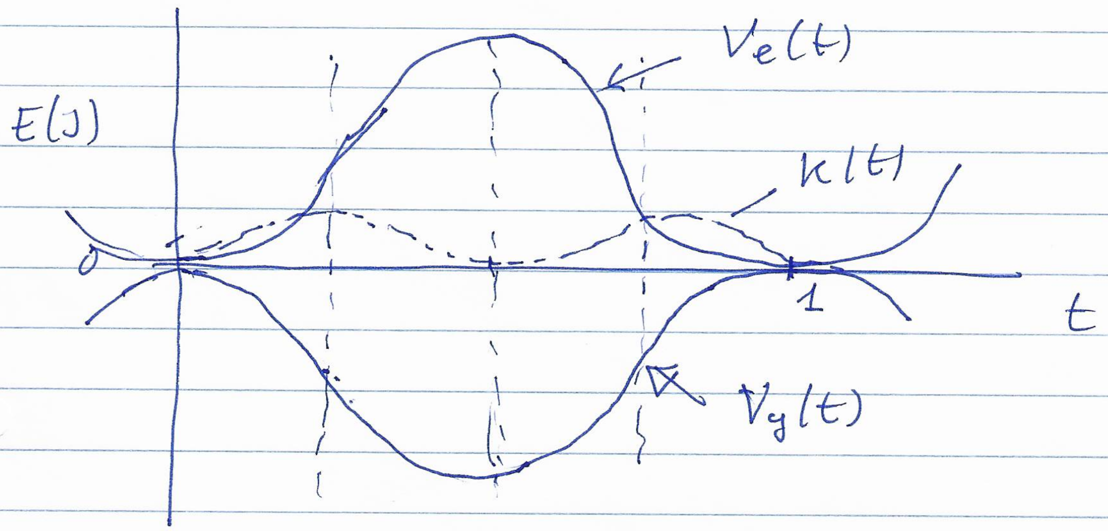
$K(t) = \frac{1}{2} m \dot z^2 = \frac{1}{2} m (z^*)^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$

$V_g(t) = mgz = mgz^*[1-\cos(\omega t)]$

$V_e(t) = \frac{k}{2} z^2 = \frac{k}{2}(z^*)^2[1-2\cos(\omega t)+\cos^2(\omega t)]$

Trasformazione continua tra

- En pot gravitaz
- En. cinetica
- En. potenziale elastica



07/04/2016

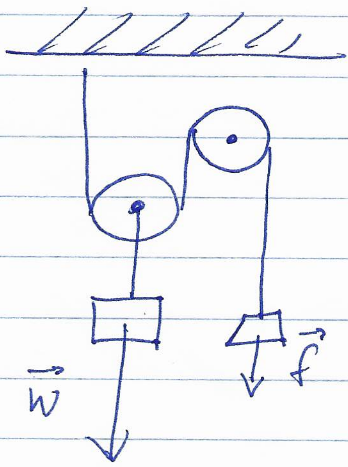
Macchine semplici

(leva, carrucola, vite, piano inclinato)

Relazione fra lavoro ed energia cinetica

Amplificatori delle forze

i.e. Doppia carrucola: quando la carrucola si solleva di h
l'estremo libero si sposta di 2h



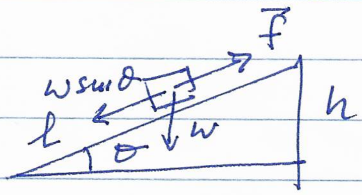
$$L = 2hf - hW = 0 \quad \text{(equilibrio)}$$

Se l'energia cinetica è costante ($\simeq 0$)
Il lavoro complessivo di tutte le forze
deve essere nullo

$$f = \frac{W}{2} \qquad \text{vantaggio meccanico} = 2$$

La forza f può equilibrare una forza doppia ma
deve avere uno spostamento doppio → Lavoro totale nullo

Piano inclinato (piramidi)



Per sollevare direttamente il corpo
$$L_1 = Wh$$
ma nel piano inclinato
$$L_1 = L_2 \Longrightarrow Wh = fl$$
$$f = W\frac{h}{l} = W\sin\theta < W$$

Potenza

Potenza media: lavoro per unità di tempo

$$W_m = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\delta L}{dt}$$

Nel caso di un punto materiale

$$W = \frac{\delta L}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

e dimensionalmente $[W] = [L^2 M T^{-3}]$

SI: watt (W) = 1 joule/sec.

Cavallo vapore (CV) = 735.5 W

Stima della potenza: tempo Δt per dislivello h

$$W \simeq \frac{mgh}{\Delta t} \qquad \left[\frac{h}{\Delta t} mg = 70\,\text{Kg} \times 9.8 = 700 \times \frac{1\,\text{m}}{1\,\text{s}} \right]$$

Salire le scale (persona) $W \simeq 0.1$ CV su tempi lunghi — Tempi brevi: anche $W = 1$ CV —

Esempio 75 kg 4 m = h $\Delta t = 4$ sec

$$W_m = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{75 \cdot 9.8 \cdot 4}{4} = 735\,W \simeq 1\,CV$$

Una macchina che lavora 1 ora con $W = 1$ kW esegue un lavoro pari a $1000 \cdot 3600 = 3.6 \times 10^6$ J = kilowattora (kWh)

$$1\,kWh = 3.6 \times 10^6\,J$$

Energia elettrica – problemi temporali erogazione

Automobile

$m = 1200\,kg$ strada con pendenza $20°$ $v = 70\,km/h$

Attrito 800N

$$\overset{4}{W} = \vec{f}\cdot\vec{v} = (f_a + mg\sin\theta)\,v =$$

$$= (800 + 1200\cdot 9.8\cdot 0.34) = 70\,\frac{10^3}{3600} =$$

$$= 9.3\times 10^4\,W = 127\,CV$$

Auto che accelera

m potenza costante W (utilizzato solo 1/3)

$$\frac{W}{3} = \vec{f}\cdot\vec{v} = f(t)\,v(t) = m\,\frac{dv(t)}{dt}\,v(t) \quad (\text{II}^o \text{ principio})$$

W è costante nel tempo ma $V(t)$ varia, quindi anche $f(t)$ varia [poiché $K = \frac{1}{2}m v^2$ $\Delta K \sim \Delta v\cdot\Delta v$]

Spostamento $ds = v(t)\,dt$

$$\frac{W}{3}\,ds = m\,v^2(t)\,\frac{dv(t)}{dt}\,dt = m\,v^2(t)\,dv$$

$$\uparrow \int_0^{S^*} ds \qquad\qquad \uparrow \int_{v_0}^{v^*} dv$$

$$\frac{W}{3}\,S^* = m\left(\frac{v^{*3}}{3} - \frac{v_0^3}{3}\right)$$

$$\rightarrow v^* = \left(\frac{W S^*}{m} + v_0^3\right)^{1/2}$$

è la velocità che ha raggiunto dopo un tratto di strada lungo S^*.

Accel. 0-100km/h è un problema diverso (svolg. da S^*)

$F = ma$ $\qquad \vec{W} = f\cdot\vec{v}$ $\qquad W\cdot\Delta t = \frac{1}{2}mv^2$

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{W}}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{\Delta t} = 750\,kg\,\frac{100^2\times 1000}{3600\times 10} = \frac{\cancel{200.000}}{\cancel{2000}} \simeq \cancel{3\,kW} \quad \text{Joule}$$

$$W = \frac{1}{2}\,1500 \times \frac{10^4\times\cancel{10^3}}{3.6\times\cancel{10^3}\times 10} = 750\times 300 = 200.000$$

Conservazione dell'energia

Particella libera in rif inerziale → $v = \text{cost}$ (I° principio)

$$dK = \delta L$$

Se forze conservative energia meccanica si conserva

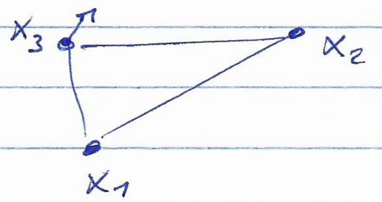
$$dK = \delta L^{(c)} = -dV \Rightarrow d(K+V)=0$$

en. cinetica – singolo corpo ~~no~~ dipende da Rif

en potenziale (di interazione) – indip. da Rif

Il fatto di potersi concentrare su un singolo corpo ~~dip~~ dipende dal fatto che l'energia di interazione dipende solo dalla distanza e da due soli corpi

$$V(x_1,x_2,x_3) = a\,\underbrace{V(x_1,x_2)}_{\text{interazione a due corpi}} + b\,V(x_2,x_3) + c\,V(x_1 x_3)$$



Ma lo spostamento di x_3 potrebbe modificare $V(x_1,x_2)$

In questo caso la situazione è molto più complessa.

Inoltre se c'è una interazione tra due corpi questa li fa muovere entrambi

$$dK_1 + dK_2 + dV = 0$$

i.e. $m + M_{terra}$ $\quad dK_{terra} \simeq 0 \rightarrow d(K_1+V) \simeq 0$

$m \ll M_{terra}$

* **Principio di Conservazione dell'energia**: in un sistema isolato, la somma di tutte le energie, in qualunque forma esse compaiano, è costante

Energia potenziale e stabilità dell'equilibrio

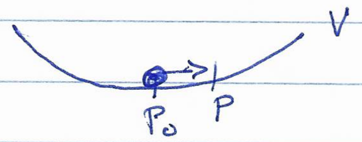
punto inizialmente fermo resta in equilibrio se $\sum f_i = 0$
Se le forze sono conservative questa condizione si può esprimere anche ~~con~~ in termini di en. potenziale.

$$\sum f_i = 0 \rightarrow \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

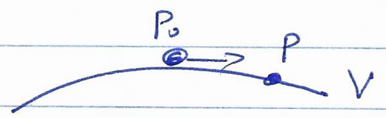
→ equilibrio statico

En. pot. costante o ha un massimo o un minimo

Punto in P_0 soggetto ad una piccola en. cinetica K_0
per la conservazione dell'en. meccanica K è $\gtrless K_0$
(nelle vicinanze di P_0) a seconda che $V \lessgtr V(P_0)$



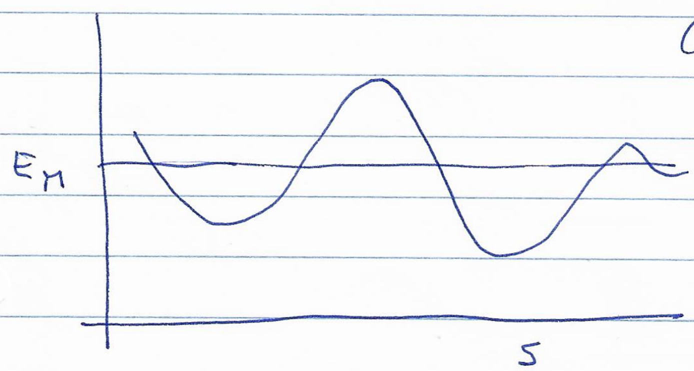
$V(P) > V(P_0) \rightarrow K(P) < K(P_0)$



$V(P) < V(P_0) \rightarrow K(P) > K(P_0)$

$$\begin{cases} \text{Massimi di } V \rightarrow \text{equilibrio instabile} \\ \text{Minimi di } V \rightarrow \text{equilibrio stabile} \end{cases}$$

Equilibrio indifferente



Caso più generale: molti minimi
Per uno spostamento $d\vec{r}$

$$\delta L = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \frac{d\vec{r}}{ds} ds =$$

$$= (\vec{f} \cdot \vec{u}_t)\, ds = f_s\, ds$$

$$\delta L = -dV$$

$$f_s = -\frac{dV}{ds}$$

Le posizioni s^* in cui $\frac{dV}{ds} = 0 \rightarrow$ di equilibrio

Se V ha un minimo in $s^* \rightarrow$ stabile

" massimo in $s^* \rightarrow$ instabile

$$\frac{d^2V}{ds^2} > 0 \rightarrow \text{minimo} \; ; \; \frac{d^2V}{ds^2} < 0 \rightarrow \text{massimo}$$

$$V(s) \approx V(s^*) + (s-s^*)\frac{dV}{ds} + \frac{1}{2}(s-s^*)^2\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{(s-s^*)^3}{6}\frac{d^3V}{ds^3} + \ldots$$

$$k = \left(\frac{d^2V}{ds^2}\right)_{s=s^*}$$

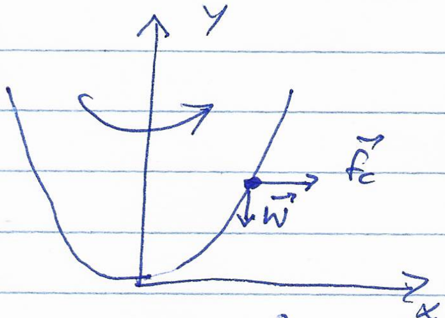
$$f_s(s) = -\frac{dV}{ds} \simeq -k(s-s^*)$$

$$m\ddot{s} = f_s(s) \approx -k(s-s^*)$$

Ogni sistema di questo tipo, se allontanato da una posizione di equilibrio stabile s^* oscilla con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

<u>Rotaia che gira</u>



$z = ax^2$

$$V = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$V(x) = m\left(ga - \frac{1}{2}\omega^2\right)x^2$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = 2m\left(ga - \frac{1}{2}\omega^2\right)x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ ga = \frac{1}{2}\omega^2 \end{cases}$$

$x = 0$ è di equilibrio stabile se $ga > \frac{1}{2}\omega^2$ e instabile se $ga < \frac{1}{2}\omega^2$

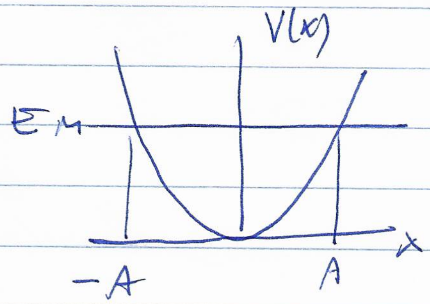
Se $ga = \frac{1}{2}\omega^2$ tutte le posizioni sono di equilibrio.

Caso unidimensionale

Conservazione dell'energia → zone accessibili del moto

$$K = E_M - V(s)$$

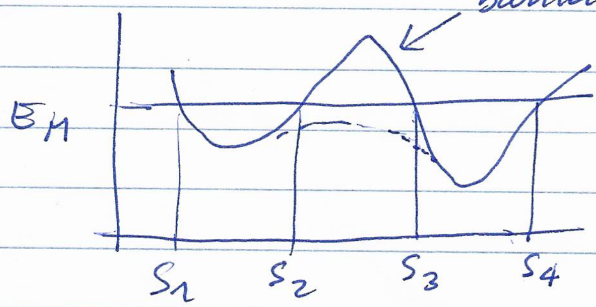
$K \geq 0$ regioni accessibili $E_M \geq V(s)$



$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x_{1,2} = \mp A = \mp\sqrt{\frac{2E_M}{k}}$$

barriera (non valicabile da particelle con E_M



Equazione oraria del moto dalla conservazione dell'energia dalla prima eq. si ha

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2[E_M - V(s)]}{m}}$$

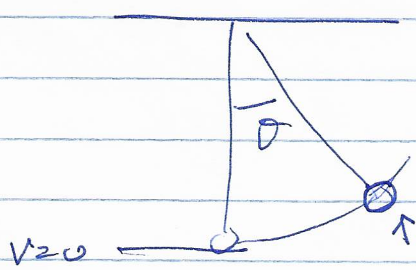
dove $V(s) = E_M$ la velocità si annulla.

$$dt = \pm\frac{ds}{\sqrt{\frac{2[E_M - V(s)]}{m}}}$$

$$t - t_0 = \pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\dots}}$$

da cui in linea di principio si può ottenere l'equazione oraria $s = s(t)$

Pendolo semplice



Il moto si svolge su un arco di raggio L.

↑ A partire da questo punto si abbandona

$$V = mgL(1-\cos\theta) = mgL\left[1-\cos\left(\frac{s}{L}\right)\right]$$

$$E_M = mgL(1-\cos\theta_0)$$

Sono accessibili solo le configurazioni per cui

$$K = E_M - V(s) = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0) \geq 0$$

$$\rightarrow \cos\theta \geq \cos\theta_0 \quad \rightarrow \quad -\theta_0 ; \theta_0$$

e il periodo di oscillazione è dato da

$$T = 2\int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{\cancel{2}\,2L/g}{(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\, d\theta = 2\sqrt{\frac{2L}{g}} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{1}{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, d\theta$$

Per piccole oscillazioni

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Lavoro in meccanica e sistemi di Rif

v.c. attrito statico vincoli lisci

Principio di relatività: in tutti i sistemi di Rif inerziali le leggi fondamentali della fisica sono le stesse.

Conservazione energia meccanica in un sistema isolato ma NON per la conservazione di E_M di un punto non isolato

08/04/2016