oscillazioni $m\ddot{x} = -kx$
attrito - Stokes $f_R = -\beta v$
$m\ddot{x} = -\beta\dot{x}\ (mg)$
adesso consideriamo i due effetti insieme
$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0\ (= F)$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine, a coefficienti costanti

$$y''(x) + a y'(x) + b y = c$$

Consideriamo l'omogenea associata $c = 0$
e poniamo $y(x) = c\, e^{\lambda x}$

$$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = c\lambda^2 e^{\lambda x}$$

Si ottiene l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\left[\ ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ \right]$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

A seconda del segno di $d = a^2 - 4b$ la soluzione ha forme diverse

(a) Per $d > 0$ due soluzioni reali distinte
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(b) Per $d = 0$ due soluzioni reali coincidenti
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$
$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda x}$$

(c) Per $d < 0$ due soluzioni complesse coniugate
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$
$$y(x) = e^{\alpha x} c_1 \cos(\beta x + c_2)$$

Oscillazioni Smorzate

$\boxed{\text{Oscillatore armonico con smorzamento.}}$

$\vec{f} = -\beta \vec{v}$ (Stokes)

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0}$$

[Ordine dell'eq. diff. e il massimo ordine di derivate]

$x = Ce^{\lambda t}$ $\quad \dot{x} = \lambda C e^{\lambda t} = \lambda x$

[Lineare a coeff. costanti (Non omogenea)]

$\ddot{x} = \lambda^2 C e^{\lambda t} = \lambda^2 x$

Equazione caratteristica

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}\right)$$

(a) $\beta^2 - 4mk < 0$ (moto sottocritico o sottosmorzato

Le due radici sono complesse coniugate

$\alpha \pm i\gamma$ con $\alpha = -\beta/2m$ $\quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{\beta^2}{4m^2}\right)}$

ponendo $\omega_1 = \cancel{\gamma}$ (?)

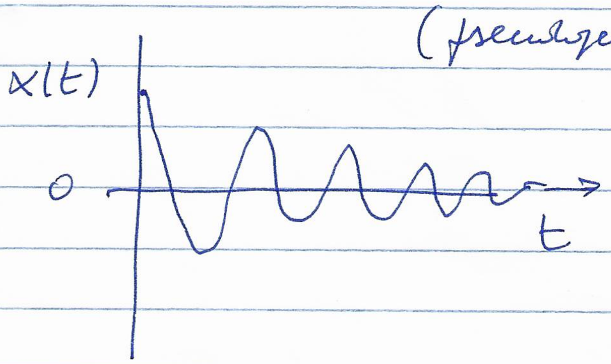
l'integrale generale risulta

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos(\omega_1 t + C_2)$$

dove C_1 e C_2 → condizioni iniziali

Moto periodico la cui ampiezza diminuisce nel tempo

(pseudoperiodico)



Pulsazione

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta^2/4m^2)}$$

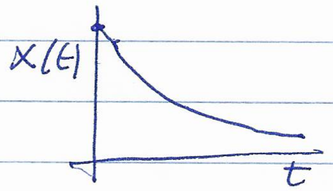
$\omega_1 \to \omega_0$ se $\beta = 0$

(b) $\beta^2 - 4mk > 0$ (supercritico – smorzato)

Due radici reali negative

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

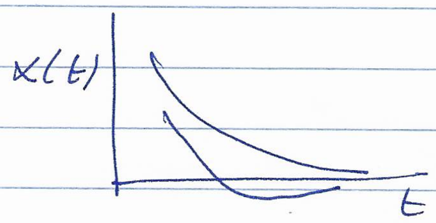
Il sistema non compie oscillazioni intorno all'equilibrio



(c) $\beta^2 - 4mk = 0$ (smorzamento critico)

Le due radici sono uguali

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{\beta}{2m} t}$$



$\beta = \beta_{cr} = 2\sqrt{mk}$

Massima velocità verso l'equilibrio

Tempo caratteristico $\tau = \frac{2m}{\beta}$

Se $C_1/C_2 < 0$ il sistema può passare per $x = 0$

Ammortizzatori dei veicoli $\beta = 40\%\, \beta_c$

Per questo oltre la molla c'è un liquido viscoso che deve passare attraverso dei fori e che dà il termine β.

Oscillazioni forzate e risonanza

Oscillatore soggetto a smorzamento e ad una forza esterna $f(t)$

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)}$$

In generale $f(t)$ può essere sviluppata in serie di Fourier. Consideriamo quindi una sola componente

$$f(t) = F\cos\omega t$$

[NB: se $f(t)$ è "piccola" la risposta totale è la somma delle risposte alle varie componenti]

Eq. non omogenea:
integrale generale della omogenea associata più un integrale particolare della non omogenea.

$$F\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\, Fe^{i\omega t} = \mathrm{Re}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$\cos(\omega t + \phi) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} - kx = Fe^{i\omega t}$$

Cerchiamo soluzioni della forma

$$x(t) = A\,e^{i\omega t}$$

per l'integrale particolare del caso non omogeneo.

Infatti per l'omogenea associata abbiamo visto che in ogni caso, a tempi lunghi, il valore di $\bar{x}(t\to\infty)\to 0$ e quindi trascuriamo questo termine.

$$\dot{x}(t) = Ai\omega e^{i\omega t} = i\omega x$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 x$$

e sostituendo si ottiene

$$(-m\omega^2 + i\beta\omega + k) A e^{i\omega t} = F e^{i\omega t}$$

$$x(t) = A e^{i\omega t} = \frac{F}{-m\omega^2 + i\beta\omega + k} e^{i\omega t} = \frac{F}{Z} e^{i\omega t}$$

<u>impedenza</u> $Z = -m\omega^2 + i\beta\omega + k$

$Re\{Z\} = k - m\omega^2$

$Im\{Z\} = \beta\omega$

$|Z| = \sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$

e la fase di Z è $\varphi = \arctg\left(\frac{\beta\omega}{k - m\omega^2}\right)$

La soluzione è quindi

$$\frac{F}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi)} = \frac{F}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$Z = |Z| e^{+i\varphi}$$

La cui parte reale (componente in fase con la forza applicata) è

$$\boxed{x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

Soluzione → eq. del moto che si instaura in risposta alla perturbazione.

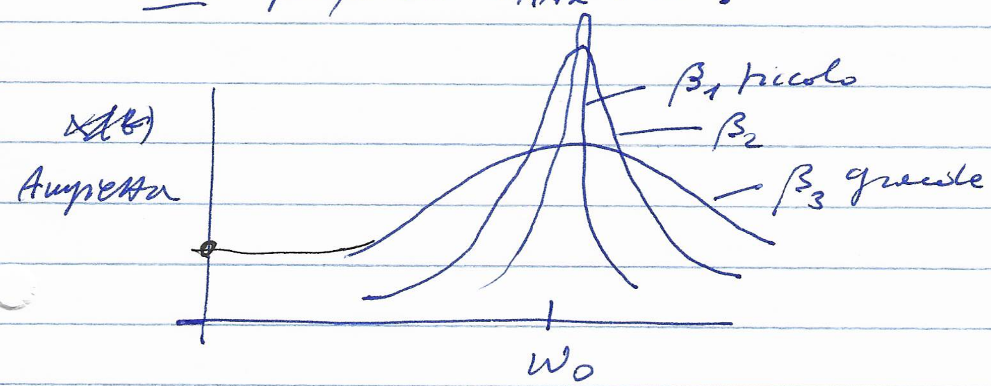
Ponendo $\omega_0^2 = k/m$

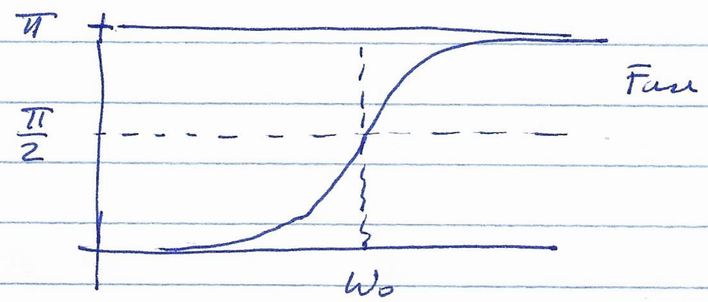
$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{m^2}}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Si può così analizzare l'ampiezza e la fase del moto in risposta ad una perturbazione

L'ampiezza di $x(t)$ è massima per $\omega \approx \omega_0$
e il sistema è in risonanza.
Il suo valore massimo è circa $x_{MAX} \approx \frac{F}{\beta\omega_0}$

<u>NB</u>: per $\beta \to 0$ $x_{MAX} \to \infty$!





La risposta di un sistema di questo tipo è apprezzabile solo se la sua frequenza caratteristica è simile a quella della forza esterna, e cioè vicino alla risonanza.
es: e strumenti di misura
orecchio etc.

Oscillatore Forzato

a

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$$

$$F(t) = F\cos(\omega t)$$

$$-Am\omega^2\cos(\omega t) - Bm\omega^2\sin(\omega t) \cancel{+} A\beta\omega\sin(\omega t) + B\beta\omega\cos\omega t +$$

$$+ Ak\cos\omega t + Bk\sin(\omega t) = F\cos\omega t$$

$$\cos(\omega t)\left[-Am\omega^2 + \cancel{A\beta\omega}\, B\beta\omega + Ak\right] = F\cos\omega t$$

$$\sin(\omega t)\left[-Bm\omega^2 - A\beta\omega + Bk\right] = 0$$

$$F = -Am\omega^2 + B\beta\omega + Ak$$

$$-Bm\omega^2 - A\beta\omega + Bk = 0$$

$$B(-m\omega^2 + k) = A\beta\omega$$

$$B = \frac{A\beta\omega}{(-m\omega^2+k)} \quad ✓$$

$$F = -Am\omega^2 + \frac{A\beta^2\omega^2}{(-m\omega^2+k)} + \cancel{\frac{A\beta k\omega}{(\ )}} \cancel{+} Ak$$

$$F = \cancel{\frac{-m\omega^2(-m\omega^2+k) + \cancel{A}\beta^2\omega^2 + \cancel{A}\beta k\omega}{(-m\omega^2+k)}}\, A$$

$$A = F\,\cancel{\frac{-(-m\omega^2+k)\,m}{\cancel{m}\ \cancel{m}}}\ \cancel{\frac{}{m^2\omega^4 \cancel{+k}\, km\omega^2 + \beta^2\omega^2 + \beta k\omega}} =$$

$$= \cancel{\frac{(+\omega^2 \cancel{+} \omega_0^2)}{-m\omega^4 + k\omega^2 + \frac{\beta^2\omega^2}{m} + \frac{\beta k\omega}{m}}}$$

⑥

$k = m\omega_0^2$

$$F = -Am\omega^2 + \frac{A\beta^2\omega^2}{(-m\omega^2+k)} + Ak$$

$$F(-m\omega^2+k) = A(-m\omega^2+k)(-m\omega^2) + A\beta^2\omega^2 + Ak(-m\omega^2+k)$$

$$F(m\omega^2-k) = A(-m^2\omega^4 + mk\omega^2) + A\beta^2\omega^2 + Akm\omega^2 - Ak^2$$

$$A = \frac{m(\omega^2 - k/m) = m(\omega^2-\omega_0^2)}{-\underline{m^2\omega^4} + m^2\omega_0^2\omega^2 - \underline{\beta^2\omega^2} + m^2\omega_0^2\omega^2 - \underline{m^2\omega_0^4}}$$

check :

$m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \underline{\beta^2\omega^2}$

$m^2(\omega^4+\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2) =$

$= m^2\omega^4 + m^2\omega_0^4 - 2m^2\omega_0^2\omega^2$

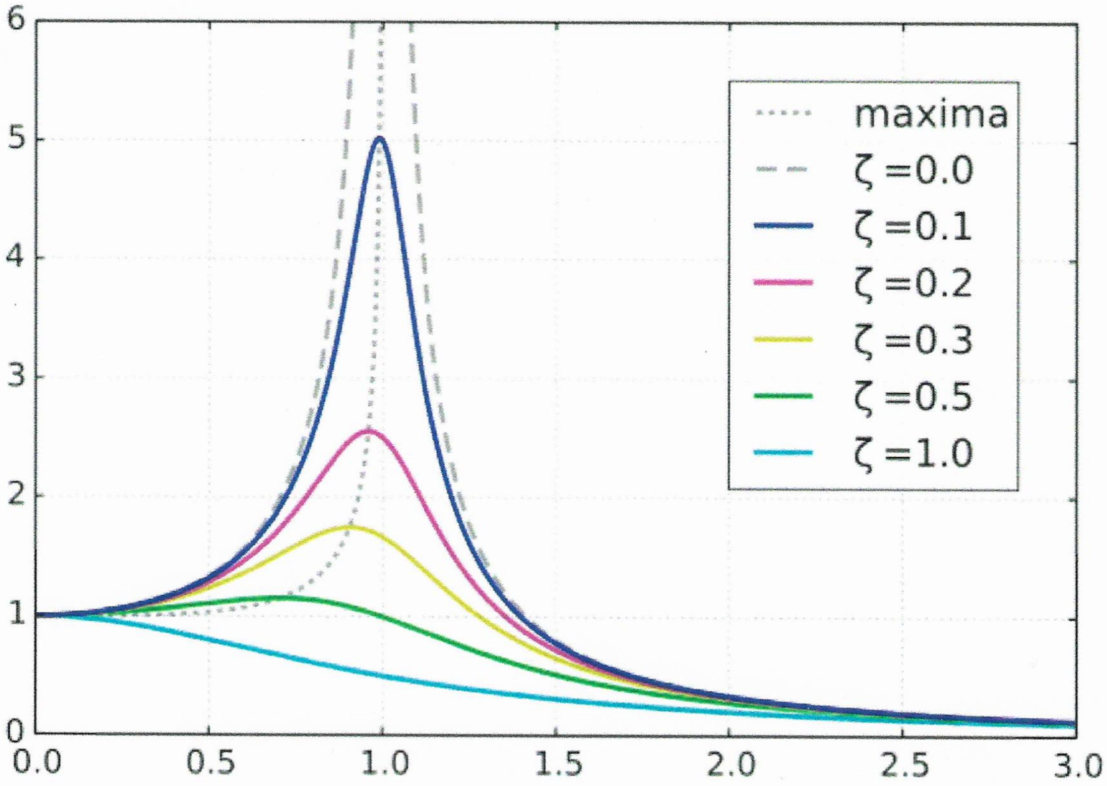
$$\boxed{x(t) = -\frac{(\omega^2-\omega_0^2)Fm}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+\beta^2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{\omega\beta F}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)+\beta^2\omega^2}\sin(\omega t)}$$

Ricordando che $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t - \phi)$

$R = \sqrt{A^2+B^2}$ $\quad \tan\phi = B/A$

NB: $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\boxed{x(t) = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+b^2\omega^2}}\cos(\omega t - \phi)}$$


6
5
4
3
2
1
0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
maxima
ζ =0.0
ζ =0.1
ζ =0.2
ζ =0.3
ζ =0.5
ζ =1.0