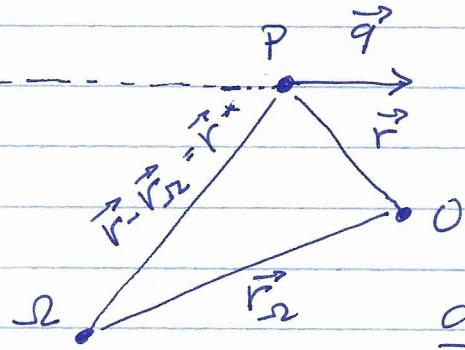


Momento Angolare

o momento della quantità di moto

In analogia al momento di un vettore rispetto al polo S_2



$$\vec{P}_{S2} = (\vec{r} - \vec{r}_{S2}) \times \vec{q} = \vec{r}^* \times \vec{q}$$

derivando rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{P}_{S2}}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_{S2})}{dt} \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_{S2}) \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r} - \vec{r}_{S2})}{dt} = \text{diff di vel. dei punti } P \text{ e } S_2$$

Poi per il II° principio della dinamica $\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}$

$$\rightarrow \frac{d\vec{P}_{S2}}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}_{S2}) \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_{S2}) \times \vec{f}$$

ma $\vec{v} \times \vec{q} = 0$ in quanto $\vec{v} \parallel \vec{q}$

$$\frac{d\vec{P}_{S2}}{dt} = -\vec{v}_{S2} \times \vec{q} + (\vec{r} - \vec{r}_{S2}) \times \vec{f} = \vec{M}_{S2} - \vec{v}_{S2} \times \vec{q}$$

ove abbiamo introdotto $\vec{M}_{S2} = (\vec{r} - \vec{r}_{S2}) \times \vec{f}$ [momento della forza]

Quindi se S_2 è un punto fisso, la derivata del momento della quantità di moto di un punto materiale è uguale al momento risultante delle forze agenti su tale punto

$$\boxed{\vec{M}_{S2} = \frac{d\vec{P}_{S2}}{dt}}$$

In analogia col teorema dell'impulso

$$\Delta \vec{P}_{S2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{S2}(t) dt$$

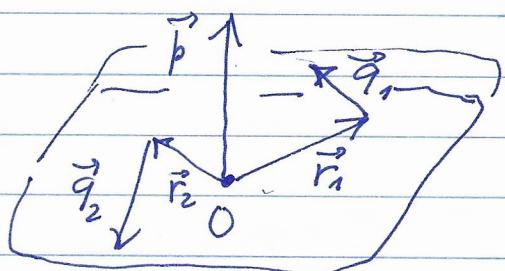
(Teorema del momento dell'impulso, impulso angolare)

→ Se il momento risultante delle forze è nullo, il momento angolare è costante -

* Caso importante: Corpi punkiformi soggetti ad una forza centrale - La risultante delle forze ha la direzione della retta fra la particella e il centro di forza $R \rightarrow \vec{f} \parallel \vec{r} = \vec{r}_2$ e quindi il suo momento è nullo rispetto ad R .
Quindi \vec{P}_2 è costante nel tempo.

Quindi per il caso di forze centrali si ha la conservazione del momento angolare -

Inoltre se dimostriamo che i moto centrali sono piani e che avvengono con velocità areolare costante

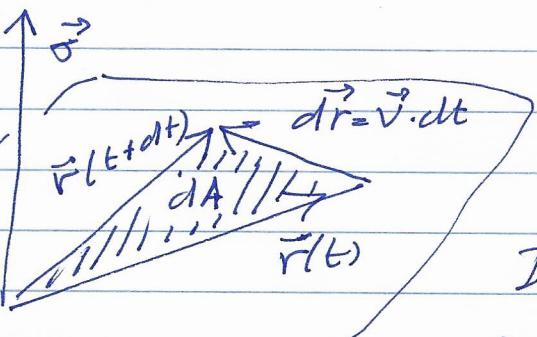


Data l'origine O nel centro
La conservazione di $\vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$

implica che il piano definito da \vec{r} e \vec{v}
su cui \vec{P} è perpendicolare resta invariato nel tempo -

I vettori $\vec{F}(t)$ per ogni t sono tutti nello stesso piano -

Velocità areolare v : vettore \perp al piano del moto
modulo uguale alle velocità
con cui il vettore \vec{r} "sposta" (coppie)
il piano e verso tale da rendere
 \vec{r} ruotare in senso antiorario -



In un intervallo $dt \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$
e quindi dA è l'area del trapezio
definito da \vec{F} e $d\vec{r}$

$$dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}| dt}{2}$$

e quindi ja il modulo di $\vec{\sigma}$ si ha

$$\sigma = \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{F} \times \vec{v}|}{2} = \frac{P}{2m}$$

Si ha poi anche la relazione vettoriale

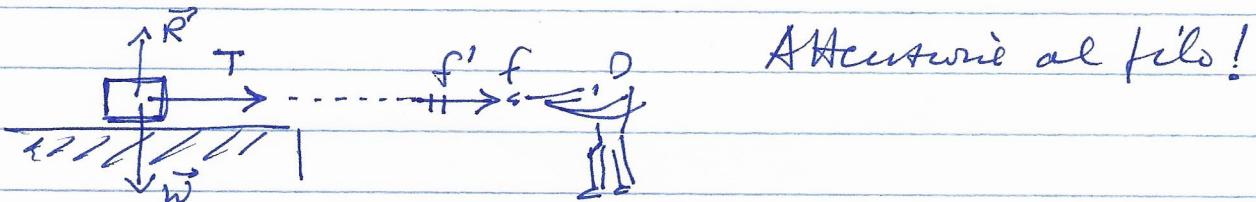
$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{P}}{2m}$$

La conservazione di $\vec{\sigma}$ implica questo la costanza della velocità areolare nei "movi centrali".

Le leggi di Keplero e i moti con vettoriale quantitativa -

Applicazioni dei principi della dinamica

Forze costanti \vec{f} escluse da \vec{F} , \vec{v} e t



$$\vec{w} + \vec{R} + \vec{T} = m \ddot{\vec{a}} \rightarrow \begin{cases} T = m \ddot{x} \\ R - w = m \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{c} T_2 \text{ filo } T_1 \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \right]$$

Applicando il II° principio ad un elemento del filo $T_1 + T_2 = M_{filo} \ddot{a} \approx 0$

$$\rightarrow T_1 \approx T_2 = T$$

Se la M_{filo} è trascurabile la tensione è la stessa ai due capi $\rightarrow \vec{T} = \vec{f}$

(Basta riflettere sul verso in cui il filo è molto pesante e il corpo leggero)

(73)

Ma se la massa del filo non è trascurabile la tensione è diversa da punto a punto

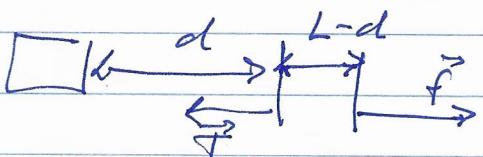
$$M_{filo} \neq 0 \quad \lambda = \frac{M_{filo}}{L} \text{ (densità)}$$

$$\vec{f} = (m + M_{filo}) \vec{a} \Rightarrow a = \frac{f}{m + M_{filo}}$$

$$\vec{f}_{fc} = m \vec{a}$$

forze applicate dal filo sul corpo

Anche un elemento di filo di massa $\lambda(L-d)$ si muove con la stessa accelerazione



$\lambda(L-d) = \text{massa dell'elemento di filo}$

$$\vec{f} + \vec{T}(d) = \lambda(L-d) \vec{a} \rightarrow f - T(d) = \lambda(L-d) a$$

$$= \lambda(L-d) \frac{f}{m + M_{filo}}$$

$$T(d) = f - \lambda(L-d)a =$$

$$= f - \lambda(L-d) \frac{f}{m + M_{filo}} =$$

$$T(d) = (m + M_{filo} d/L) a = \frac{f}{m + M_{filo}} (m + M_{filo} - \cancel{\lambda L} + \lambda d) \xrightarrow{M_{filo} d}$$

La tensione quindi cresce linearmente con d

- all'inizio del filo ($d=0$) $T(0) = ma = f \frac{m}{m + M_{filo}}$

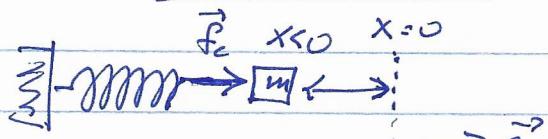
- alla fine del filo ($d=L$), $T(L) = (m + M_{filo}) a = f$

(*) Esercizi su fili, cerchioli e freni meccanici

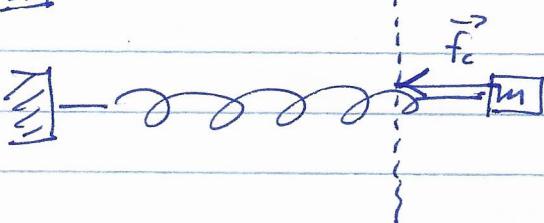
Forze elastiche e legge di Hooke

Molla ideale: La forza ha modulo \propto alla deformazione della molla (rispetto alla lunghezza a riposo) e agisce nel verso opposto

$$\vec{F}_c = -k \times \vec{x} \quad \text{legge di Hooke}$$



Forza elastica parca
un moto oscillatorio
armonico



$$\vec{F}_c = m \vec{a}$$

$$-kx = m \ddot{x}$$

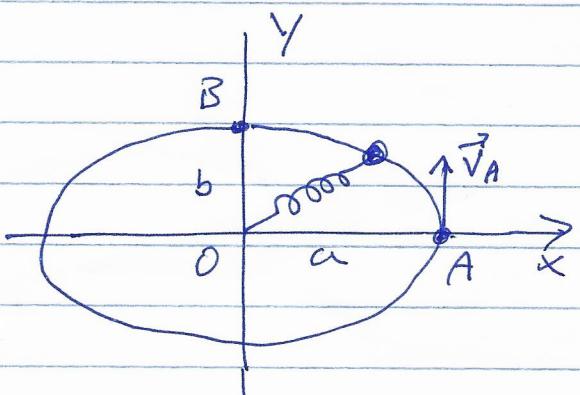
~~$$\ddot{x} = \omega_0^2 x$$~~

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow \text{governato da}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le altre costanti sono connesse alle condizioni iniziali

$$A = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + x_0^2}} \quad ; \quad \tan \phi_0 = - \frac{x_0}{\omega_0 x_0}$$



Un corpo di massa m si muove
in un piano xy sotto
l'azione di una molla

$$\text{ideale } \vec{F} = -k \vec{r}$$

Dimostrare che la traiettoria
è un'ellisse

Forse centruli \rightarrow momento angolare costante

$$\textcircled{?} \quad \vec{P}_B = \vec{P}_A = \vec{p} \vec{k} = m v_A \alpha \vec{k} \quad (\text{ok})$$

Eq. del moto $\vec{F} = m \vec{a}$ proiettati sugli assi

$$m \ddot{x} = -kx \quad m \ddot{y} = -ky$$

Condizioni iniziali

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_A$$

$$x(t) = a \cos \omega_0 t \quad ; \quad y(t) = b \sin \omega_0 t$$

$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e } b = \frac{v_A}{\omega_0}$$

Eliminando t da queste equazioni si ricava che
si ottiene

$$x^2(t) = a^2 \cos^2(\omega_0 t) = a^2 (1 - \sin^2 \omega_0 t)$$

$$\sin^2(\omega_0 t) = 1 - \frac{x^2(t)}{a^2}$$

$$y^2(t) = b^2 \sin^2(\omega_0 t) = b^2 \left(1 - \frac{x^2(t)}{a^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} = 1} \quad \underline{\text{ellisse}}$$

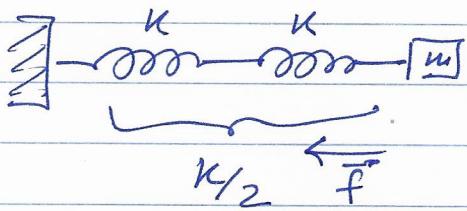
In un intervallo per al periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, il vettore $\vec{r}(t)$ spazia l'interno area dell'ellisse

con la velocità areolare costante

$$\bar{v} = \frac{p}{2m} = \frac{a v_A}{2} = \frac{\omega_0 a b}{2} = \frac{2\pi a b}{T}$$

$$S = \bar{v} T = \pi a b$$

Molle in serie



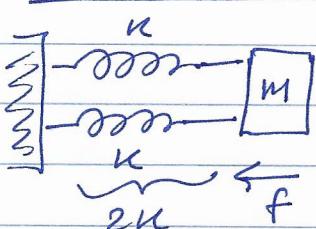
Per un allungamento totale x
si ha $x/2$ per ogni molla

$$f = -k_{tot}x$$

$$f = -k_{tot}x = -k \frac{x}{2} \rightarrow k_{tot} = \frac{k}{2}$$

forza applicata sulla
molla di destra

Molle in parallelo

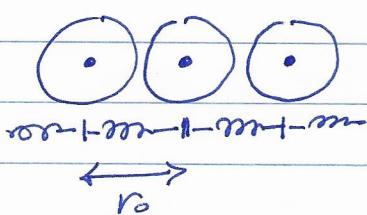


È equivalente a una singola molla
di costante $2k$

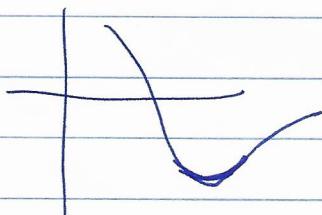
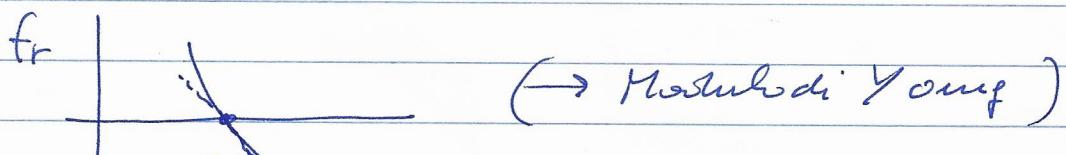
$$f = -kx - kx = -(2k)x$$

Materiale elastico

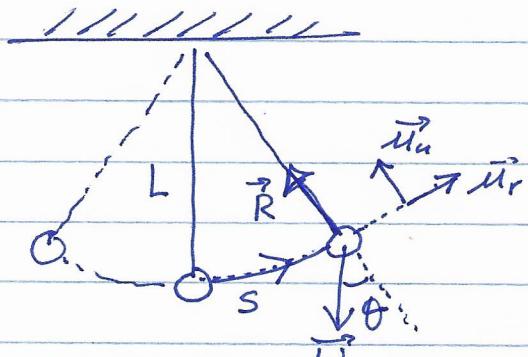
comportamento microscopico delle molecole



$$f_r(r) = \left(\frac{df_r}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) = -C(r - r_0)$$



Pendolo semplice



II° principio della dinamica.

Filo inestensibile di massa ≈ 0

Trascurando gli attriti

$$\vec{W} + \vec{R} = m \vec{a}$$

$\uparrow m$

Dato la direzione iniziale del filo questa definisce il piano del moto S.

Mot. vincolato sulla circonferenza di raggio L

Asse curvilineo S

$$-m g \sin \theta = m \ddot{s}$$

$$-m g \cos \theta + R = m \frac{\dot{s}^2}{L}$$

tensione del filo

$$\left(\begin{array}{l} \ddot{s} = \ddot{s}_b + \ddot{s}_n = a_b \vec{u}_b + a_n \vec{u}_n = \ddot{s} \vec{u}_b + \frac{\dot{s}^2}{L} \vec{u}_n \\ \ddot{s}_n = \frac{v^2}{L} \vec{u}_n \end{array} \right)$$

$$\theta = \frac{s}{L} \rightarrow \boxed{\ddot{s} + g \sin\left(\frac{s}{L}\right) = 0} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{soluzioni solo} \\ \text{numeriche} \end{matrix}$$

da cui si ottiene la legge oraria - da questa con la seconda equazione si può calcolare la tensione del filo

N.B.: Quando $\theta = 0$ si ha $R > mg$!

Per $\theta = \frac{s}{L} \ll 1$

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{g}{L} s = 0} \rightarrow \text{oscillazioni armate}$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/L} \quad ; \quad s(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

S_0 = max ampiezza

$$\text{periodo} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Galileo: oscillazioni isocronie - Il periodo è costante indipendentemente dall'ampiezza -

→ Periodo = orologio $(Mg = M_2 \cdot)$

Il periodo del pendolo non dipende da m (dipende soltanto dalla molla) - ma solo da L e g -

→ minima di g -

30/03/2016

Forze che dipendono dalla velocità

Corpo in caduta libera in un fluido (aria) frenato dalla resistenza del moto

Il ritrno di Aristotele - Auto: $V_{MAX} \sim F_{MAX}$ + altri esempi

In questi casi effettivamente la forza dipende da forma, dimensioni, metà del moto etc.

Nei casi più semplici: bassa velocità e moto lineare

Legge di Stokes

$$\vec{f}_R = -\beta \vec{v}$$

z e percorso o verso nell'acqua

(Tranne quando effettivamente la spinta di Archimede etc)

$$\vec{w} + \vec{f}_R = m \vec{a}$$

$$-mg - \beta \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + g = 0$$

Eq. diff. lineare, non omogenea, a coeff. costanti:

Soluzione = solut. eq. omogenea associata +
+ soluzione particolare

Una funzione dell'eq. - $\frac{mg}{\beta}$ t soddisfa l'equazione -
Omogenea associata ($\frac{g}{\beta} = 0$) è

A

L'equazione caratteristica dell'eq. omogenea
associata ($g=0$) è

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m} \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = -\frac{\beta}{m}$$

Le soluzioni generali dell'eq. omogenea è

$$x(t) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right)$$

$$\dot{x} = C_2 \left(-\frac{\beta}{m}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right)$$

$$\ddot{x} = C_2 \frac{\beta^2}{m^2} \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} = 0$$

Quindi la soluzione generale dell'eq. non omogenea è

$$x(t) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) - \frac{mg}{\beta} t$$

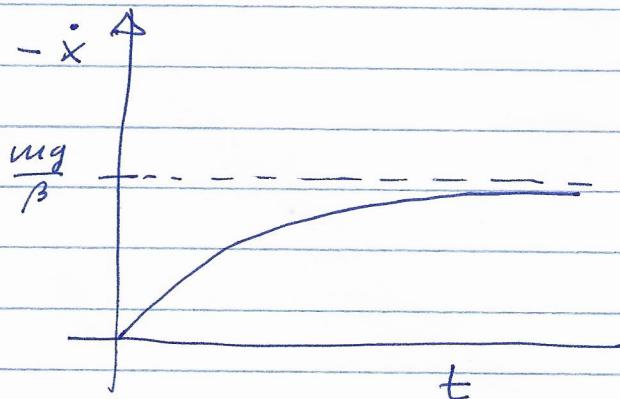
dove

$$\dot{x}(t) = -C_2 \frac{\beta}{m} \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) - \frac{mg}{\beta}$$

Con le condizioni iniziali $x_0 = h$ e $\dot{x}_0 = 0$ si ha

$$\begin{cases} x(t) = h + \frac{m^2 g}{\beta^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) \right] - \frac{mg}{\beta} t \\ \dot{x}(t) = -\frac{mg}{\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) \right] \end{cases}$$

La vel è < 0, all'inizio è = 0, poi per
 $t \rightarrow \infty \quad \dot{x}(\infty) = -\frac{mg}{\beta}$



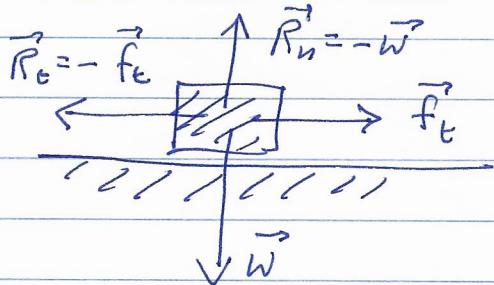
A perti di fluido $\dot{x}(\infty)$ cresce con m e cala con β .

β dipende dalla forma del corpo e dalle proprietà del fluido.

Per l'aria ci alcune considerazioni che possono essere diverse r.e. $f_R = C_D A \rho^2$ o altro

Leggi empiriche, non hanno natura "fondamentale" ma sono molto "importanti"

Affatto resistente



A. costante di commissione
Fondamentali x la ruota etc

Affatto statico

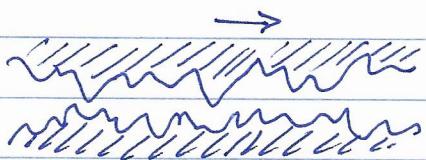
Se si applica f_t il corpo non si muove se questa non supera un certo valore limite R_t^{MAX}

$$R_t^{\text{MAX}} = \mu_s R_n \quad \mu_s = \text{coeff di attrito statico}$$

$$R_t \leq \mu_s R_n$$

Premere sul piano $\mu = \frac{W}{S} = \frac{R_n}{S}$

Microspecifiche



Le superficie di contatto effettivo
è circa uguale da S e dipendente da R_n

$$A \approx \mu \cdot S = \frac{R_n}{S} \cdot S \approx R_n$$



Affatto dinamico

Una volta in movimento l'affatto permane ma con una forza inferiore

attrito dinamico < attrito statico

Perché il movimento rende inferiore i contatti

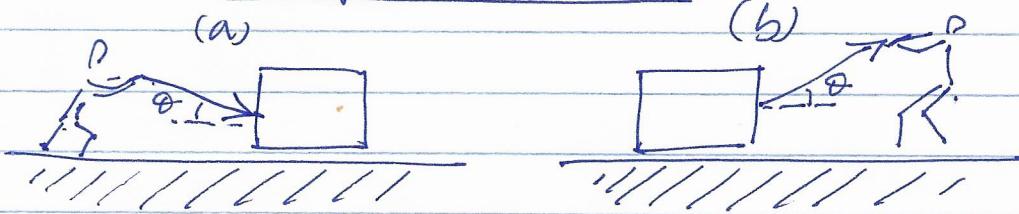
$$R_t = \mu_d R_n \quad \mu_d < \mu_s$$

coeff. attrito dinamico

$$\vec{R}_t = -\mu_d R_n \vec{n}_r$$

In realtà μ_d in genere dipende da V_r

Spingeie o trine?



Componente resistibile f_{resist} ≥ R_t^{max}

$$-f^{(a)} \sin \theta + R_n^{(a)} - mg = 0 \quad f^{(b)} \sin \theta + R_n^{(b)} - mg = 0$$

$$R_n^{(a)} = f^{(a)} \sin \theta + mg \quad R_n^{(b)} = -f^{(b)} \sin \theta + mg$$

dove f_{resist} = R_t^{max} se ha

$$f^{(a)} = \frac{\mu_s m g}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \quad f^{(b)} = \frac{\mu_s m g}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

Dunque $f^{(a)} > f^{(b)} \rightarrow$ corrente trine ($\text{se } \theta \geq 0$)

Attrito e locomozione

Anti, biciletta, automobile etc

Ruote - resiste all'attrito slittabile (attrito statico x ruote)
Il punto di appoggio è istantaneamente fermo -

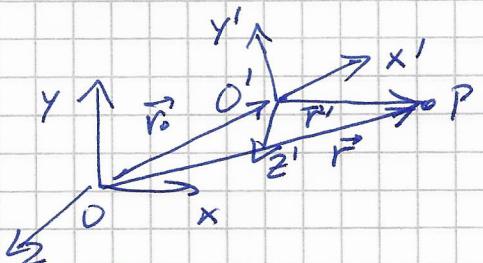
Tutte le forze di attrito ostacolano il moto -

ma in qualche modo anche lo permettono

30/03/2017

Mecanica

Trasformazioni galileiane e covariante del II° principio della dinamica.



Due Ref. inerti, moto relativo traslazionale \vec{v}_0 rettilineo e uniforme rispetto ad O

Dimostrazione che il II° principio ($F=ma$) mantiene il principio di relatività (covariante)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 ; \quad \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t \quad (\text{a } t=0 \quad O \equiv O')$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t$$

Per le componenti cartesiane

$$\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z' = \vec{i}(x - v_{ox}t) + \vec{j}(y - v_{oy}t) + \vec{k}(z - v_{oz}t)$$

N.B.: in genere $x' \neq x - v_{ox}t$ etc., infatti moltiplicando scalamente per $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$

$$\begin{cases} x' = (\vec{i} \cdot \vec{i})(x - v_{ox}t) + (\vec{i} \cdot \vec{j})(y - v_{oy}t) + (\vec{i} \cdot \vec{k})(z - v_{oz}t) \\ y' = -- \\ z' = -- \end{cases} \quad (\vec{j} \cdot \vec{k}) = \cos \gamma \cos \gamma' z$$

relazione che mantiene tra (x', y', z') di \vec{r}' e (x, y, z) di \vec{r}

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{i} \cdot \vec{i}) & (\vec{i} \cdot \vec{j}) & (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ (\vec{j} \cdot \vec{i}) & (\vec{j} \cdot \vec{j}) & (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ (\vec{k} \cdot \vec{i}) & (\vec{k} \cdot \vec{j}) & (\vec{k} \cdot \vec{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - v_{ox}t \\ y - v_{oy}t \\ z - v_{oz}t \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice delle rotazioni } |R| = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \gamma' & \dots & \dots \\ \cos \beta' & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui S e S' abbiano lo stesso orientamento

$$|R| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

In questo caso

$$\begin{cases} x' = x - v_{ox}t \\ y' = y - v_{oy}t \\ z' = z - v_{oz}t \end{cases}$$

Trasformazioni di Galileo

Derrivate le prime equazioni (nel caso di orientamento fissa)

$$\vec{i}' \cdot \vec{v}_x' + \vec{j}' \cdot \vec{v}_y' + \vec{k}' \cdot \vec{v}_z' = \vec{i}'(v_x - v_{ox}) + \vec{j}'(v_y - v_{oy}) + \vec{k}'(v_z - v_{oz})$$

$$\begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} v_x - v_{ox} \\ v_y - v_{oy} \\ v_z - v_{oz} \end{pmatrix}$$

derrivate ancora e con $\vec{V}_0 = \text{cost} \rightarrow \frac{d\vec{V}_0}{dt} = 0$

$$\vec{i}' \cdot \vec{a}_x' + \vec{j}' \cdot \vec{a}_y' + \vec{k}' \cdot \vec{a}_z' = \vec{i} \cdot \vec{a}_x + \vec{j} \cdot \vec{a}_y + \vec{k} \cdot \vec{a}_z$$

$$\begin{pmatrix} a_x' \\ a_y' \\ a_z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Nel caso della stessa orientazione

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases} \rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

per trasformazione di Galileo

Nel caso di rotazione si trasforma con $|R|$
(statica)

L'acc. è la stessa ma quindi le sue componenti sono diverse nel caso di ref. ruotato

Per un ed \vec{f} trasformazione

$$m \text{ è simile} \rightarrow m' = m$$

$$\begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

(3)

Quindi portando da $\vec{F} = m\vec{a}$ e applicando (R) si ha

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

Quindi l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ è conservata passando da un sistema di ref. inerziale ad un altro sistema inerziale.

In particolare se i sistemi hanno lo stesso orientamento

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
 resta invariante

Invece per trasformazioni di Galileo -

il secondo principio della dinamica soddisfa quando
il principio di relatività galileiana.

I criteri di base $d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ è invariante per diversi sistemi di riferimento

OK per ~~$v \ll c$~~ $v_0 \ll c$ -

\rightarrow se $v_0 \approx c \rightarrow$ trasformazioni di Lorentz -

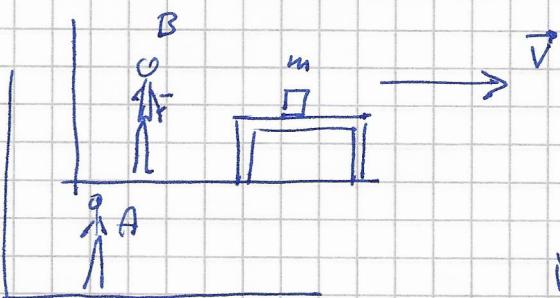
Mecanismo

Sistemi non inertiali - Forze apparenti

Tram di freno o accelerazione, curva

Sposta in avanti o di lato (forza se si è non nascoste)

i.e. freno che freno



Per B il luogo subisce una rapida accelerazione

Moto traslatorio

Punto P soggetto a forza \vec{F} nel sistema fermo

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

nel sistema mobile e desiderando

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{x'} = v_x - \bar{v}_x \\ v_{y'} = v_y - \bar{v}_y \\ v_{z'} = v_z - \bar{v}_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{x'}^t = a_x - \bar{A}_x \\ a_{y'}^t = a_y - \bar{A}_y \\ a_{z'}^t = a_z - \bar{A}_z \end{array} \right.$$

R, V, A sono la posizione, velocità e accelerazione di O' rispetto ad O.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

$$\vec{f} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{A}) = m\vec{a}' + m\vec{A}$$

$$\vec{f} - m\vec{A} = m\vec{a}'$$

forza di inerzia

\vec{A} → accel. di traslazione

Affinché il punto resti in equilibrio in O' (mobile)

$$\text{dove enne } \vec{f} - m\vec{A} = 0$$

Va applicata una forza \vec{f} che congiung l'inerzia

i.e. Manghi sul tram etc

(2)

Moto qualunque di O' rispetto ad O

$$\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z' = \vec{i}(x - X) + \vec{j}(y - Y) + \vec{k}(z - Z)$$

ma ora $X \neq V_a t$ e $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ non sono costanti -

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}' \quad \text{etc}$$

dovendo $\vec{i}'v_x' + \vec{j}'v_y' + \vec{k}'v_z' + \vec{\omega} \times (\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z') =$
 $= \vec{i}(v_x - V_a) + \vec{j}(v_y - V_a) + \vec{k}(v_z - V_a)$

In termini vettoriali

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_G = \vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{OP})$$

$$\vec{v}' = \vec{i}'v_x' + \vec{j}'v_y' + \vec{k}'v_z' \quad \begin{array}{l} \text{vel. di } P \text{ rispetto al ref. mobile} \\ (\text{vel. relativa}) \end{array}$$

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \quad \begin{array}{l} \text{vel. di } P \text{ rispetto al sistema fiso} \\ (\text{vel. assoluta}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{OP} = \\ &= \vec{i}V_a + \vec{j}V_a + \vec{k}V_a + \vec{\omega} \times (\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z') \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{vel. con cui si muove rispetto} \\ \text{al sistema fiso il} \\ \text{getto solido con} \\ \text{il sistema mobile che} \\ \text{al tempo } t \text{ e' occupato da } P \\ (\text{vel. di trascinamento}) \end{array}$$

Alla vel. \vec{v} di O' si somma la
vel. corrispondente alla rotazione
di \vec{OP}

N.B.: se P è solido con il sistema mobile ha
una vel. rispetto a quello fiso e' $\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{OP}$

(3)

Dermosio curva

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_{\text{rel}} &= \vec{\alpha}'_{\text{ax}} + \vec{\alpha}'_{\text{ay}} + \vec{\alpha}'_{\text{az}} + \vec{\omega} \times (\vec{v}'_{\text{ax}} + \vec{v}'_{\text{ay}} + \vec{v}'_{\text{az}}) + \\ &+ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}'_{\text{ax}} + \vec{r}'_{\text{ay}} + \vec{r}'_{\text{az}})) + \vec{\omega} \times (\vec{v}'_{\text{ax}} + \vec{v}'_{\text{ay}} + \vec{v}'_{\text{az}}) + \\ &+ \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}'_{\text{ax}} + \vec{r}'_{\text{ay}} + \vec{r}'_{\text{az}})] = \\ &= \vec{\alpha}'(\alpha_a - A_a) + \vec{\beta}(\alpha_r - A_r) + \vec{\kappa}(\alpha_z - A_z) \end{aligned}$$

dove $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ accel. angolare del sistema mobile

In termini vettoriali

$$\vec{\ddot{\alpha}} = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_t - \vec{\alpha}_c = \vec{\alpha} - [\vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})] - \\ - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{\alpha}' = \vec{\alpha}'_{\text{ax}} + \vec{\alpha}'_{\text{ay}} + \vec{\alpha}'_{\text{az}}$$

accelerazione relativa

accel. di P rispetto al sistema mobile

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}'_{\text{ax}} + \vec{\alpha}'_{\text{ay}} + \vec{\alpha}'_{\text{az}}$$

accel. assoluta

di P rispetto al sistema fissa

$$\vec{\alpha}_t = \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{OP} + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})] \quad \text{accel. di traslazione}$$

accel. con cui si muove rispetto al sistema fissa il punto di S che all'istante t è occupato da P

$$\vec{\alpha}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

accel. di Coriolisquesto termine è nullo se $\vec{v}' = 0$

cioè se P è in equilibrio nel sistema mobile

N.B.: se $\vec{\alpha}_t$ abbiamo \vec{A} che corrisponde all'accel di O rispetto ad O

$$[\vec{\alpha} \times \vec{OP}] = \vec{\alpha}_t \text{ accel. tangenziale}$$

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})| = \omega^2 r \text{ accel. radiale}$$

$$\vec{f} = m\vec{\alpha}_t - m\vec{\alpha}_c = m\vec{\alpha}'$$

Forze apparenti o inertiali

Dinamica dei sistemi di riferimento non inertiali

Leggi di Newton \leftrightarrow Rif. inertiali

La legge $f = ma$ non è valida nei riferimenti non inertiali.

$$\vec{f} = m\vec{a} = m(\vec{a}_S + \vec{a}_e + \vec{a}_{co})$$

↑ ↑ ↑ ↗
 S S' trascinamento Coriolis

S : nonstabile S' : nonstabile

$$\text{in } S': m\vec{a}' = \vec{f} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_{co}$$

$$\vec{f}_e = -m\vec{a}_e \quad f_{co} = -m\vec{a}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\boxed{f' = m\vec{a}'}$$

$$f' = \vec{f} + \vec{f}_{in} = \vec{f} + (\vec{f}_e + \vec{f}_{co})$$

Analogo a $f = ma$ (in S) ai cui pew risultano dei termini apparenti - forze inertiali o pseudoforse

Accel nel riferimento mobile (motu qualunque)

x' = rett. longitudinale del P proiettato sul rif. mobile

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}' \text{ etc.}$$

$$\vec{x}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow v_x'\vec{i}' + v_y'\vec{j}' + v_z'\vec{k}' + \vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &\rightarrow a_x'\vec{i}' + a_y'\vec{j}' + a_z'\vec{k}' + \vec{\omega} \times (v_x'\vec{i}' + v_y'\vec{j}' + v_z'\vec{k}') + \vec{\alpha} \times \vec{x}' \\ &+ \vec{\omega} \times (v_x'\vec{i}' + v_y'\vec{j}' + v_z'\vec{k}') + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] \\ &+ \vec{\alpha} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \quad (\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}) \end{aligned}$$

e quindi vettorialmente

$$\vec{a}' = \vec{a} = \vec{a}_t - \vec{a}_{co} = \vec{a} - [\vec{A} + \alpha \vec{\omega}^T P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}^T P)] \\ - 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

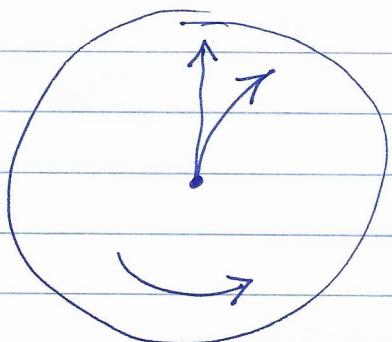
\vec{a}' = accel. di P rispetto al rif. mobile

\vec{a} = accel di P rispetto al rif. fiso (accel. assoluta)

\vec{a}_t = traslamento - accel di un punto solido con il Rif. mobile visto dal rif. fiso

Accel. centrifuga

\vec{a}_c = accel. di Coriolis

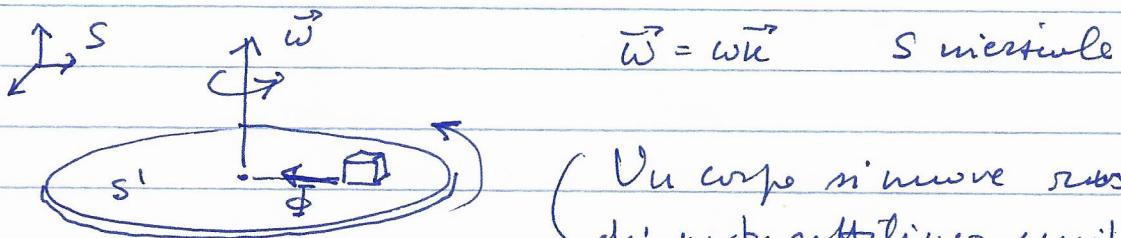


r.e. Venti Alisei etc.

N.B.: I sistemi di rif. non inerti sono strettamente distinguibili da quelli inerti.

r.e. filo di un pendolo in un'urne accelerata

Dinamica su una piattaforma rotante



(Un corpo si muove rispetto ad S')
di moto rettilineo uniforme.

Accelerazioni di traslamento \rightarrow acc. centrifuga
di un punto solido con la piattaforma

$$\vec{f}_c = \vec{f}_{cf} = m\omega^2 \vec{r} \vec{n}_p$$

dove \vec{n}_p è il versore della retta uscente radialmente
dall'asse di rotazione

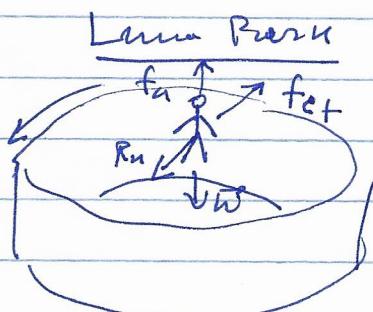
f_c vettore centrifugo, anche \vec{f}_{sc} forza centrifuga -

* Forza di Coriolis - è presente solo se il punto si muove nel sistema non inerziale

La forza centrifuga esiste nella prospettiva di S'

Per la prospettiva S è la forza centrifuga che è
necessaria per mantenere il corpo ad una distanza
fissa dall'asse

Se si taglia il filo l'oggetto procede di moto rettilineo
uniforme rispetto ad S - cioè rispetto ad S la forza
centrifuga non esiste -



\vec{R}_n = reazione della parete

$$R_n = m\omega^2 d \quad f_c = mg$$

$$f_c = mg \leq \mu_s R_n$$

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu_s}$$

Se il corpo si muove con velocità \vec{V} nel S' si ha anche la forza di Coriolis

$$\boxed{\vec{f}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}'}$$

Rimettiamo rotante lascia con un cubetto di ghiaccio
Nel sistema S il cubetto è libero ($\vec{f} = 0$) e resta fermo - Nel sistema S' si muove di moto circolare uniforme con velocità

$$\vec{V}' = -\vec{\omega} \times r\vec{u}_r$$

Per l'osservatore non ineriale S' che utilizza

$$\vec{f}' = m\vec{a}'$$

sul cubetto agisce una pseudo forza (centrifuga)

$$\vec{f}' = -m\omega^2 r\vec{u}_r$$

che ha direzione e modulo della forza centrifuga ma verso opposto

$$\vec{f}_{ct} = m\omega^2 r\vec{u}_r$$

Va poi considerata anche la forza di Coriolis

$$\begin{aligned}\vec{f}_{co} &= -m\vec{a}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}' = 2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r\vec{u}_r) = \\ &= -2m\omega^2 r\vec{u}_r\end{aligned}$$

$$\text{da cui: } \vec{f}' = \vec{f}_{ct} + \vec{f}_{co}$$

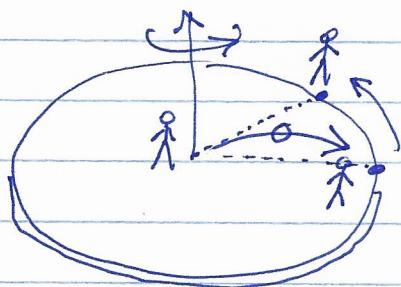
Notare quindi è complicato descrivere questa situazione nel S' .

Forza di Coriolis

Assumiamo $\vec{\omega} \perp \vec{V}$ (piattaforma rotante)

$$\vec{F}_{co} \approx m\vec{g} \text{ se } V = 1 \text{ m/s e } \omega = 5 \text{ rad/sec}$$

La Forza di Coriolis si oppone a V' e ha un verso tale da determinare una deviazione verso la destra dell'osservatore.



Nel sistema S' è la pelle che ruota dritta, mentre in S la pelle si muove di moto rettilineo uniforme.

Sistema di riferimento terrestre

Consideriamo solo la rotazione della Terra in se stessa

Forza centrifuga $\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\omega^2 r \hat{\omega} \hat{r}$

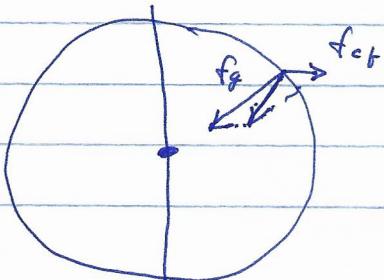
r = raggio del parallelo al punto considerato

F. di Coriolis

$$F_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Filo a piombo fermo

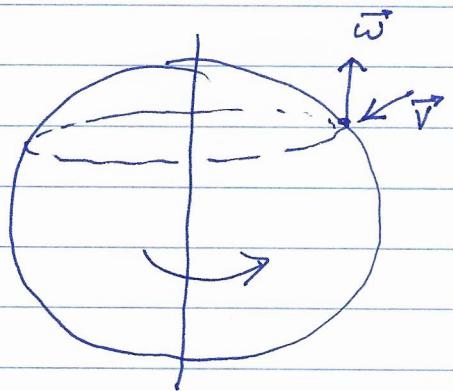
Forza gravitazionale \vec{F}_g



Un corpo in caduta libera scenderebbe lungo la verticale con la sola forza centrifuga

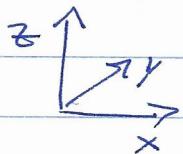
Coriolis

($\vec{\omega}$ è nel piano ~~del~~ y, z)



- $\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{v}' \times \vec{\omega}$ e'
dritto verso est

Diversi i loro istruzioni se il
corpo si muove nella direzione
orizzontale (su un piano)



Il corpo gira verso destra nell'emicerchio settentrionale
e verso sinistra in quello boreale -

Pendolo di Foucault

31/03/2026