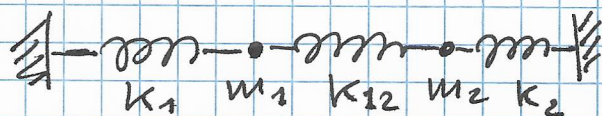


OSCILLATORI ACCOPPIATI

- Giust' nstr - Oscillazioni forzate.

Oscillatori accoppiati



$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k$$

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + k_{12} (x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 + k_{12} (x_1 - x_2) \end{cases}$$

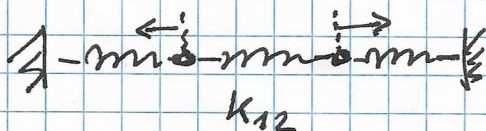
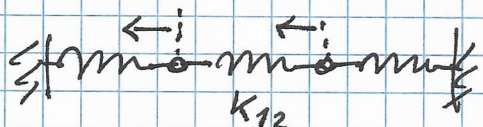
$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k + k_{12}}{m} x_1 = \frac{k_{12}}{m} x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k + k_{12}}{m} x_2 = \frac{k_{12}}{m} x_1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$

$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, (x_0, φ_0) due b.c.
 ~~$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}}$~~
 $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$

Modi normali di due oscillatori accoppiati



ω_{01} molto in fase
 ω_{02} anti in fase
 di fase

Le soluzioni generali e' una combinazione
lineare dei due modi:

$$\begin{cases} X_1 = X_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_{01}) + X_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_{02}) \\ X_2 = X_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_{01}) + X_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

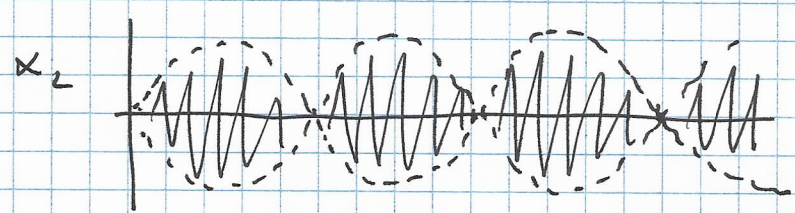
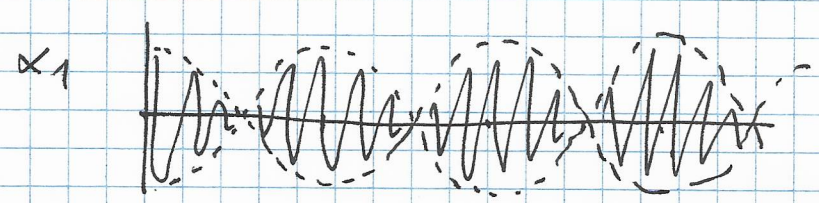
Se $X_{01} = X_{02} = X_0$ $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0 = 0$

$$\begin{cases} X_1 = X_0 \sin \omega_{01} t + X_0 \sin \omega_{02} t \\ X_2 = X_0 \sin \omega_{01} t + X_0 \sin \omega_{02} t \end{cases}$$

Prodotto di seno $\rightarrow$

$$\begin{cases} X_1 = 2 X_0 \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_{02} - \omega_{01}) t \right] \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_{02} + \omega_{01}) t \right] \\ X_2 = 2 X_0 \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_{02} - \omega_{01}) t \right] \cdot \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_{02} + \omega_{01}) t \right] \end{cases}$$

Oscillazioni con frequenza $(\omega_{01} + \omega_{02})/2$ modulate con
una ampiezza di modulazione $(\omega_{02} - \omega_{01})/2$



Quando uno ha ampiezza massima l'altro ha la minima

Energia meccanica

E per ogni $\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2$

(3)

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + k_{12} (x_2 - x_1)^2$$

$$E = E_1 + E_2 + E_{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} (k + k_{12}) x_1^2 \quad \text{I}^\circ \text{ oscillatore} \\ E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} (k + k_{12}) x_2^2 \quad \text{II}^\circ \text{ oscillatore} \\ E_{12} = -k_{12} x_1 x_2 \quad \text{interazione} \end{array} \right.$$

L'energia totale è costituita non solo da quella dei singoli oscillatori.

$E_{12} = -k_{12} x_1 x_2$ è l'energia di accoppiamento fra i due oscillatori.

rispetto all'equilibrio

Onde: perturbazioni di un sistema esteso, che si propagano e trasportano energia - mezzo elastico.

Esempi: onde del mare, radio e in genere e.m., il suono, la luce, onde gravitazionali,

Repr. X,

Onde meccaniche

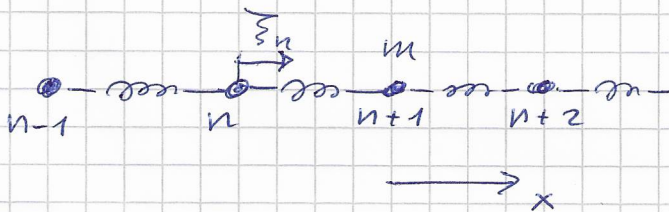
NB: in meccanica quantistica funzione d'onda - probabilistica

Onde trasversali e longitudinali

perturbazioni (spostamenti) $\leftrightarrow$ direzione di propagazione.

Chitarra: onde trasversali (anche e.m. etc)

Onde di pressione in un gas - suoni - longitudinali.



$$f_{n,n+1} = k (\cancel{\xi_{n+1} - \xi_n}) (\xi_{n+1} - \xi_n)$$

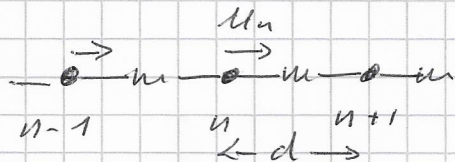
$$f_{n-1,n} = -k (\cancel{\xi_n - \xi_{n-1}}) (\xi_n - \xi_{n-1})$$

$$\sum f = k (\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}) \simeq k \frac{\partial^2 \xi(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi_{n+2} - \xi_{n+1} - \xi_{n+1} + \xi_n}{\Delta x^2}$$

$$\xi_{n+2} - 2\xi_{n+1} + \xi_n$$

Appendix - Fournier

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K_0 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

$$u_n = u_0 e^{i k r_n}$$

$$u_{n+1} = e^{i k d} u_n$$

$$u_{n-1} = e^{-i k d} u_n$$

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = u_0 (e^{i k d} - 2 + e^{-i k d}) =$$

$$= u_0 (2 \cos kd - 2)$$

$$u(k, t) = u(k) e^{i \omega t}$$

$$\frac{d^2 u(k, t)}{dt^2} = -\omega^2 u(k, t)$$

$$-\omega^2 m = -K_0 (2 - 2 \cos kd) \approx -K_0 (kd)^2$$

$$\omega^2(k) = \sqrt{\frac{K_0}{m}} \sqrt{[2 - 2 \cos(kd)]} \approx \left(\sqrt{\frac{K_0}{m}} \right) (kd)$$

$$\omega^2 \approx \left(\frac{K_0}{m} \right) (kd)^2 = \left(\frac{K_0 d^2}{m} \right) k^2$$

$$\frac{K_0}{m} \sim \frac{1}{T^2}$$

$$\frac{d^2 K_0}{m} \sim \frac{L^2}{T^2} \sim v^2$$

nel continuo

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2}$$

(D'Alambert) Lineare, sovrapposizione

Al continuo $m \rightarrow \rho$

$$\rho \frac{d^2 \xi(x,t)}{dt^2} = \kappa \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

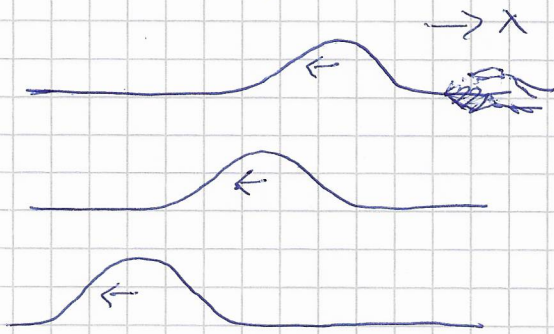
$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}}$$

20/05/2016

Equazione di D'Alembert.

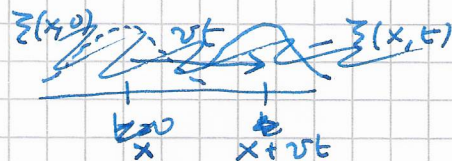
Eq. lineare alle derivate parziali, omogenea e del II° ordine.

Esempio: corda tesa (elastica)

 $t_1 \ 0$ $t_2 \ t$ t_3

Le perturbazioni per
restano immutate
nel tempo e si propagano
con velocità v

$$\xi(x,t) = \xi(x+vt, 0)$$

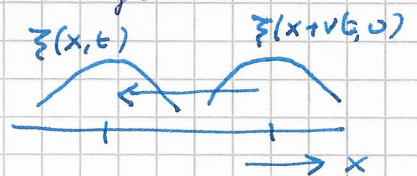


$$\xi(x,t) = f(x-vt) \quad \text{onda progressiva}$$

$$\xi(x,t) = f(x+vt) \quad \text{onda regressiva}$$

Cioè sono funzioni (arbitrarie) dell'argomento

$$w = x \mp vt$$



$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v \frac{d\xi}{dw}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dw}$$

da cui

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mp v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) =$$

$$= \mp v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \mp v \frac{\partial}{\partial x} \left(\mp v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Equazione delle onde 1-d non dispersive (no attrito)

Eq. lineare ed omogenea - la sovrapposizione di due o più soluzioni è anche soluzione.

i.e. $\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ desc

è la soluzione più generale.

Principio di sovrapposizione.

Tra le possibili soluzioni sono le onde armoniche

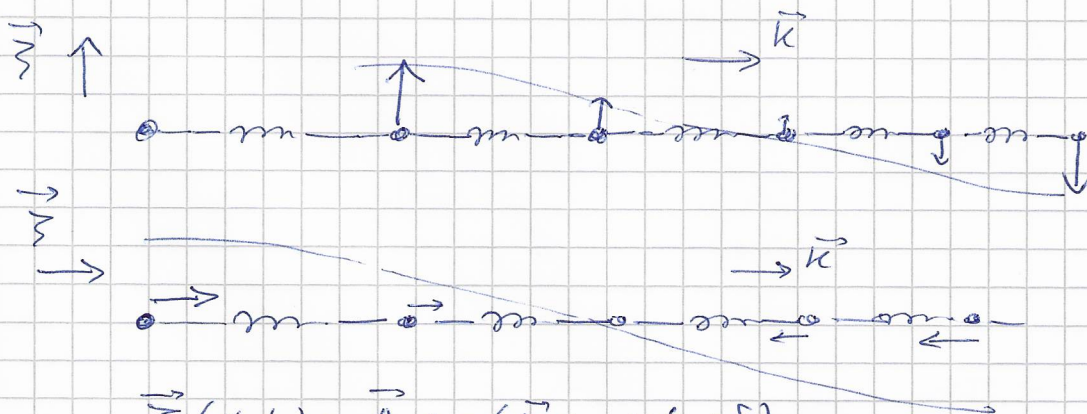
$$\boxed{\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)} \quad (\omega = kv)$$

Onde longitudinali e onde trasversali

1d $\rightarrow$ 3d

$\searrow$ onde scalari

$\searrow$ componenti cartesiane di comp. vettoriali



$$\vec{\xi}(x, t) = \vec{A} \cos(\vec{k}x - \omega t + \delta)$$

$$f(x, y, z)$$

generalizzando l'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

$$f = A \cos kx \cos \omega t \quad \text{è soluzione se } k = \frac{\omega}{v}$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$f = A \cos kx \cos \omega t = \frac{A}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{A}{2} \cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cancel{A k \cos kx \cos \omega t} - A k \sin kx \cos \omega t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -A k^2 \cos kx \cos \omega t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A \cos kx \sin \omega t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -A \omega^2 \cos kx \cos \omega t \quad \rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

Onde piane

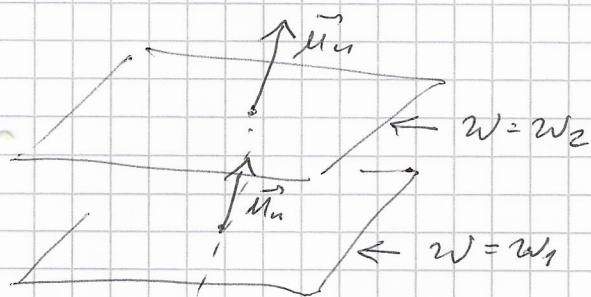
$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$\exists$ soluzioni del tipo $f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \mp vt)$ che
dipendono spazialmente solo da $(\vec{u}_n \leftrightarrow \vec{k})$

$$W = \vec{r} \cdot \vec{u}_n \mp vt = (x u_{nx} + y u_{ny} + z u_{nz}) \mp vt$$

dove $\vec{u}_n$ è un vettore unitario $\rightarrow$ Onde piane uniformi

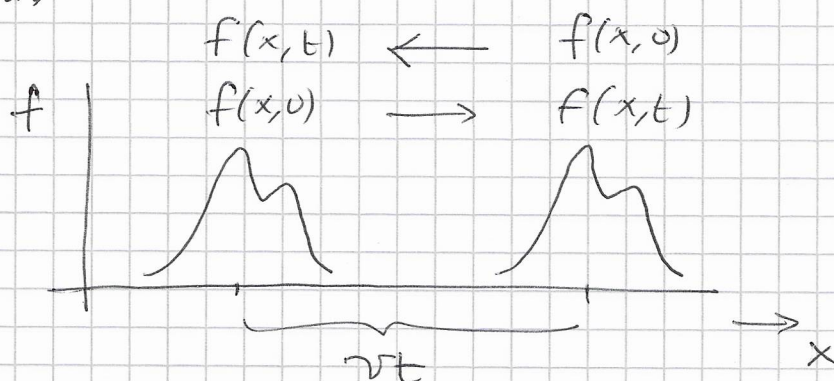
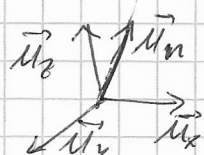
La funzione ~~fisica~~ fisica dell'ampiezza dell'onda
dipende solo da $\vec{r} \cdot \vec{u}_n$ cioè dalla distanza
dell'origine dal piano $\perp \vec{u}_n$



Superficie d'onda
al numero del piano fronte
con velocità $\vec{v} = \pm v \vec{u}_n$

nel verso di $\vec{u}_n$ se $w = \vec{r} \cdot \vec{u}_n - vt$

Onda piana progressiva che si propaga
senza distorsione.



$$f(w) = f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \mp vt)$$

vediamo
che

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mp v \frac{df}{dw} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \mp v \frac{d}{dw}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dw^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_{nx} \frac{df}{dw}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = u_{ny} \frac{df}{dw}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = u_{nz} \frac{df}{dw}$$

La l'azione dell'operatore nabla $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z})$

su f è equivalente a quella dell'operatore $\vec{u}_n \frac{d}{dw}$

In particolare per il laplaciano ~~∇^2~~ $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

$$\text{equivalente a } (\vec{u}_n \frac{d}{dw})(\vec{u}_n \frac{d}{dw}) = \frac{d^2}{dw^2}$$

quindi

$$\nabla = \vec{u}_n \frac{d}{dw} \Rightarrow \nabla^2 = \frac{d^2}{dw^2}$$

e quindi

$$\nabla^2 f = \frac{d^2 f}{dw^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

anche la sommazione è una soluzione.

Onde sferiche e cilindriche

Il fronte d'onda è lo stesso su superfici sferiche e cilindriche -

NB: a grande distanza dall'origine si possono approssimare come onde piane -

Onde Piane Armoniche (Monocromatiche)

La funzione f è di tipo sinusoidale

$$f = \vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

A : ampiezza

δ : fase iniziale

$\vec{k}$: vettore d'onda

ω : pulsazione

NB : In più di una dimensione A è un vettore $\vec{A}$ e non possono avere

$\vec{A} \parallel \vec{k}$: onde longitudinali

$\vec{A} \perp \vec{k}$: onde trasversali

$$\begin{aligned} A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) &= A \cos \left[k \left(\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k} t \right) + \delta \right] = \\ &= A \cos \left[k (\vec{u}_k \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k} t) + \delta \right] \end{aligned}$$

Il vettore $\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{k}$ indica la direzione di propagazione ed esprime la rapidità con cui, in un dato punto, cambia nel tempo la fase dell'onda. Il rapporto ω/k misura la velocità apparente di una superficie d'onda.

cioè il luogo dei punti in cui l'onda ha un fissato
valore equivocono fissato per, velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Per ogni tipo di onda armonica esiste una relazione
tra ω e k detta relazione di dispersione

In generale $\omega(\vec{k})$ può essere molto complessa.

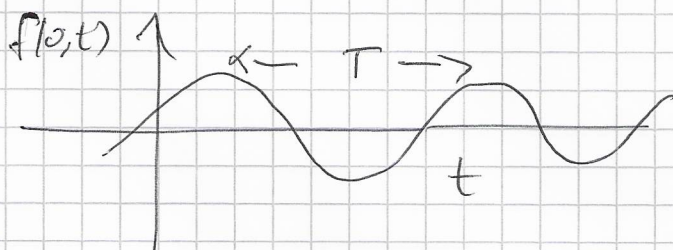
Se il mezzo non è dispersivo (e/o a grande lunghezza d'onda)
il rapporto tra ω e k è indipendente da k , cioè la
velocità di fase non dipende da ω . Il resto gode
di questa proprietà rispetto alle onde e.m. ma non
le vibrazioni dei solidi in cui $\omega(\vec{k})$ è approssimato
da $v + k$ solo a grande lunghezza d'onda (o piccolo k) -
anche anacore -

$$\omega(\vec{k}) = kv \rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

quindi la velocità di fase è indep. da ω .

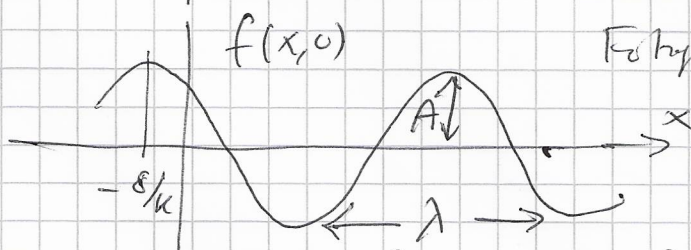
Velocità con cui si muovono piani di eguale fase
(superfici d'onda) perpendicolari a $\vec{k}$.

Visualizzazione: fissi una variabile e rappresentare
l'onda in funzione dell'altra



onda osservata
che si muove

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Fotografia di un'onda

$$A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = A \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(t + T) + \delta]$$

Lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$

in ogni t

$$A \cos(kx - \omega t + \delta) = A \cos[k(x + \lambda) - \omega t + \delta]$$

$$\lambda = vT$$

Analogo per un'onda seppur -

Un'onda armonica mantiene sempre ~~la~~ la frequenza

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

della sorgente che l'ha generata -

La velocità di propagazione cambia con il mezzo -

Te v non varia ma variano v e λ -

Sovrapposizione di onde

Le onde rigorosamente monocromatiche sono di difficile realizzazione ma rappresentano un concetto molto utile anche in pratica -

Inoltre ogni perturbazione fisicamente realizzabile e di durata finita si può rappresentare come sovrapposizione di onde monocromatiche

- Linearità dell'equazione: sovrapposizione
- Teorema di Fourier. (molto generale)

Sommando $f = A \cos(kx \mp \omega t)$ con diversi valori di ω e k si possono ottenere altre soluzioni non sinusoidali

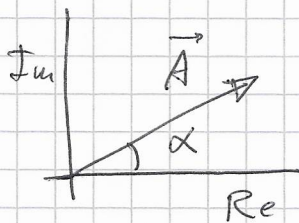
Rappresentazione Complessa (?)

$$f = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \delta) = \operatorname{Re} [A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t + \delta)}] \doteq \operatorname{Re} z$$

$$z = A e^{i\alpha} \quad \alpha = \vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t + \delta$$

Anche queste funzioni complesse sono soluzioni e
conjugate $z^* = A e^{-i\alpha}$.

Piano complesso $\leftrightarrow$ relazioni di fase.



Onda armonica; vettore che ruota

$$f_1 = A_1 \cos(kx - \omega t)$$

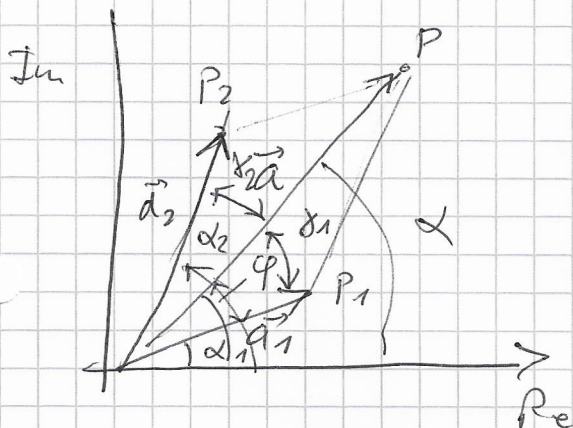
$$f_2 = A_2 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$f = f_1 + f_2$$

$$\alpha_1 = (kx - \omega t)$$

$$\alpha_2 = (kx - \omega t + \varphi)$$

Al numero di x e t $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ non cambia



Per il modulo A del vettore somma

$$\vec{OP} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi$$

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Le parti reali del numero complesso $\vec{OP}$ si ottiene
proiettando $\vec{OP}$ sull'asse reale

$$f = f_1 + f_2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} \cdot \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

L'ampiezza dell'onda risultante dipende dallo sfasamento
 A_{tot}

$$A_{\min} = |A_1 - A_2| \quad \text{se } \varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2n+1)\pi$$

$$A_{\max} = A_1 + A_2 \quad \text{se } \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$$

$$\frac{A_1}{\sin \delta_1} = \frac{A_2}{\sin \delta_2} \quad \delta_1 + \delta_2 = \varphi$$

Se le onde hanno uguale ampiezza $A_1 = A_2$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\varphi}{2}$$

$$A = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$f = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

L'ampiezza dipende da φ e varia tra $A = 0$ e $A = 2A_1$.

25/05/2016

Interferenza

Due onde che si sovrappongono nella stessa zona formano dei luoghi a particolari effetti nella distribuzione di energia $\rightarrow$ Interferenza

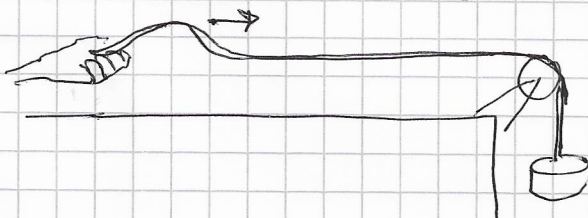
Onde coerenti: mantengono una differenza di fase costante nel tempo.

Energia trasportata dalle onde elastiche

Propagazione delle onde = trasporto energia e impulso

Riflessione delle onde e trasmissione di un'informazione a distanza -

Consideriamo le onde trasversali in una corda



Scostando l'estremo libero si può generare un'onda trasversale propagandosi $\xi(x-vt)$ imprimendo un impulso nella direzione trasversale.

Lavoro compiuto $\rightarrow$ energia della corda -

cinetica - densità della corda

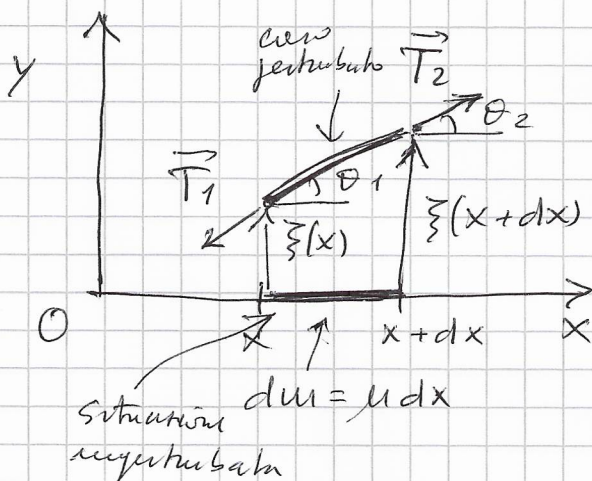
potenziale - deformazione.

La perturbazione si propaga verso destra trasferendo l'energia.

Consideriamo un tratto infinitesimo sottoposto ad una forza $\vec{F}$

Onde Trasversali su una corda

Consideriamo un tratto infinitesimo di una corda elastica tesa.



Forze di tensione dovute alle altre parti della corda -

Perturbazione componente y -

Trascuriamo la gravità

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \mu dx \vec{a}$$

$$F_x = (T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1) \approx O(\theta^2) \quad T_1 \approx T_2 \quad \cos \theta_1 \approx \cos \theta_2$$

$$F_y = (T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1) \approx (0) \quad (\theta_1, \theta_2 \text{ piccoli } \ll 1)$$

$$\approx (T_2 \tan \theta_2 - T_1 \tan \theta_1) \approx T (\tan \theta_2 - \tan \theta_1)$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta$$

Moto di una solenoidale sull'asse y

$$F_y = T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = \mu dx a_y = \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\Delta \xi(x+dx)}{\Delta x} \approx \frac{\partial \xi(x+dx)}{\partial x}$$

$$\tan \theta_1 \approx \frac{\partial \xi(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right]}{dx} \approx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$F_y = T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = T \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right] \approx$$

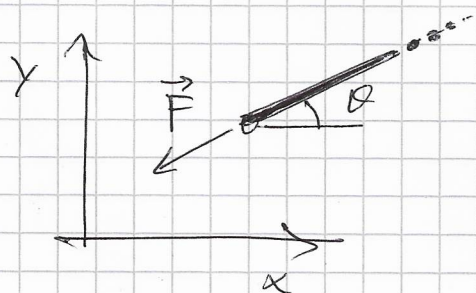
$$\approx T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

⊗ Tormento al trasferimento di energia in una corda elastica



$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_y d\xi = F_y \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \equiv$$

$$\equiv P(x, t) dt$$

Potenza $P = \text{forza}(y) \text{ per la velocità}$

$$F_y = -T \sin \theta \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Per la forza trasversale si ha

$$F_y = -T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad P(x,t) = -T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{onde progressive}}}{v} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$P(x,t) = v T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{T}{v} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = v \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

che può essere scritta nella forma simmetrica

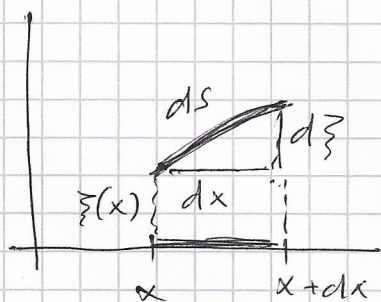
$$P(x,t) = v \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{en. cinetica}}}{\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2} + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en. potenziale}}}$$

Quindi la perturbazione che arriva in x al tempo t , nell'intervallo dt , interessa un tratto tra x e $x+dx$ di lunghezza $dx = v dt$

Il lavoro fatto da questa sollecitazione è quindi

$$\delta L^{(cin)} = P(x,t) dt = \underbrace{\frac{1}{2} (\mu dx) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx}_{\text{en. potenziale}}$$

Energia potenziale



Elementi deformati

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (d\xi)^2}$$

la deformazione è

$$dl = ds - dx = dx \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right]$$

L'el. δl corrisponde al lavoro $\delta L = T \delta l$
che si compie contro la forza di tensione per ottenere
un allungamento δl .

Per piccole deformazioni

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

e quindi

$$\delta U \approx T \delta x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 T \delta x$$

Densità di energia $u(x, t)$ nel tratto δx

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

$$= \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \mu v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

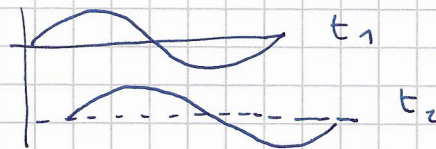
$$P(x, t) = v u(x, t)$$

e la grandezza $P(x, t)$ è il valore istantaneo con cui
l'energia trasportata dall'onda passa per un punto x .

Energia e potenza nelle onde monocromatiche

Onde armoniche su una corda

$$\xi = A \cos(kx - \omega t)$$



$$P(x, t) = v \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) \leftarrow \text{potenza}$$

$$u(x, t) = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) \leftarrow \text{densità di energia}$$

Potenza e densità di energia soddisfanno le equazioni
di D'Alembert con velocità pari alla vel. dell'onda
e si propagano come onde sulla corda.

Per mantenere un'onda progressiva con continuità è necessario fornire con continuità energia.

Per ogni periodo $\tau = 2\pi/\omega = \lambda/v$ si deve trasmettere l'energia

$$E = \int_{t_0}^{t_0+\tau} P(0, t) dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dt =$$

$$= v \mu \int_{t_0}^{t_0+\tau} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \mu v A^2 \omega^2 \tau$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda}$$

In ogni istante t , in presenza della perturbazione, ad un tratto di corda di lunghezza λ , è associata un'energia costante E

$$\int_x^{x+\lambda} \mu(x, t) dx = \mu \int_x^{x+\lambda} \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

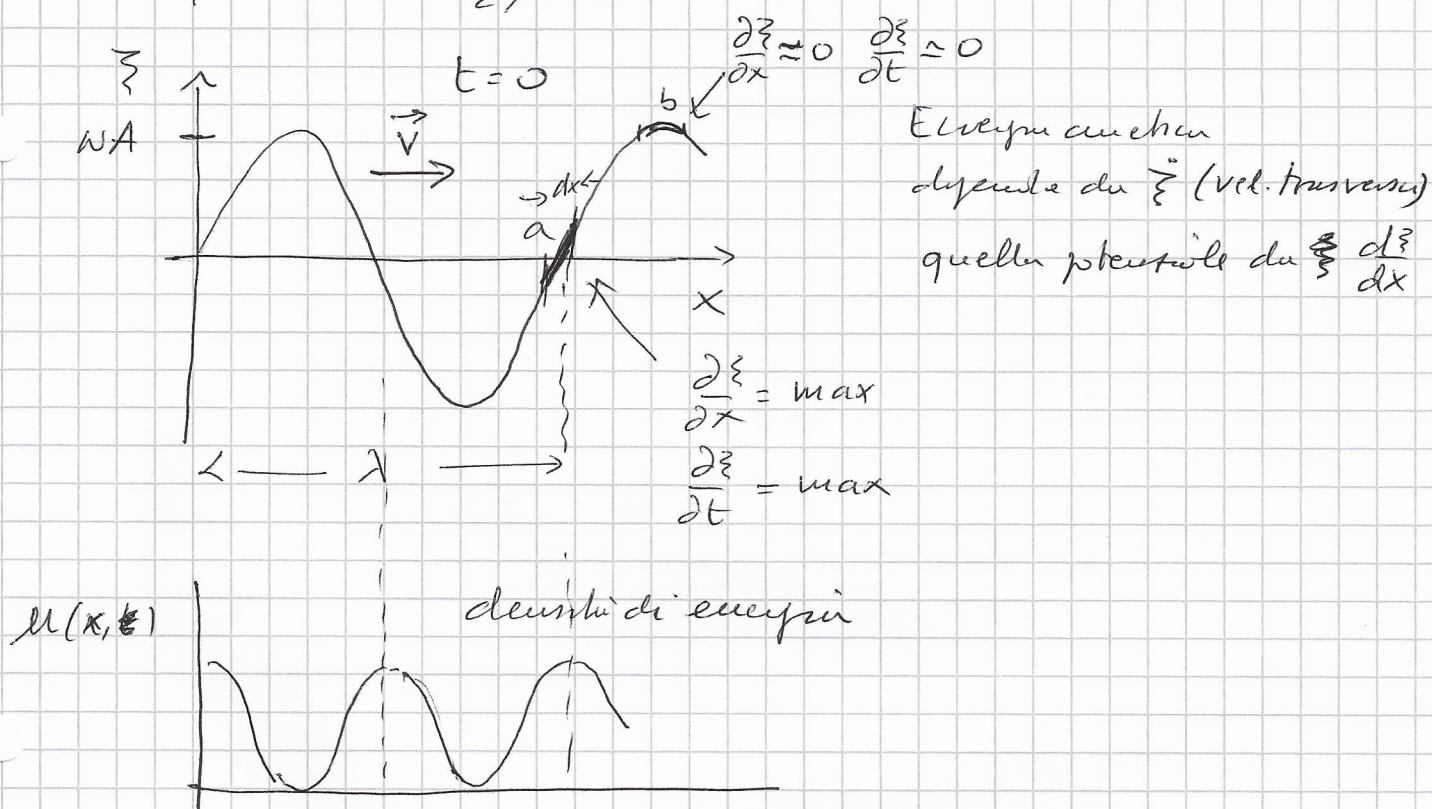
NB: L'energia E è uguale all'energia totale $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ di un oscillatore armonico di massa $m = \mu \lambda$ che oscilla con pulsazione e ampiezza pari a quella dell'onda.

Ma in un dato tratto di corda en. pot. ed en. cinetica sono sempre uguali tra loro, ma cambiano valori da un elemento all'altro. ($\neq$ oscillatore)

Riassunto: ogni elemento $dm = \mu dx$ in presenza dell'onda ha un'energia

$$U(x,t) dx = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) dx$$

che deriva in per un'oscillazione circ. e un'osc. pot. che non resta costante nel tempo ma oscilla tra zero e il valore massimo $\mu \omega^2 A^2 dx$. Il valore medio su un periodo è $\frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 dx$



Trasferimento di energia nelle onde monocromatiche
si considerano quantità mediate su un periodo:

$$\begin{aligned} \text{Potenza media } \bar{P} &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} v \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \mu v A^2 \omega^2 \end{aligned}$$

Intensità media dell'onda

Trattiamo il problema dell' interferenza

$$I \propto \frac{1}{2} A^2$$

Consideriamo due onde di ampiezza A ma fasi diverse

Per ognuna si avrebbe

$$I_1 = I_2 \propto \frac{1}{2} A^2$$

Nel caso di sovrapposizione avremo

$$I \propto \frac{1}{2} 4A^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{I}{I_1} = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

Al variare della differenza di fase φ il rapporto varia da 0 a 4 -

Sovrapponendo due onde in fase si quadruplica l'energia -

Se φ rimane costante -

Se invece φ varia continuamente nel tempo si deve calcolare la media temporale di I/I_1 -

$$\text{Quindi } \cos^2 \rightarrow \langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

e la somma di onde incoerenti è $I = 2 I_1$

• Se φ è costante l'intensità di due onde può variare da 0 a 4 (coerenti)

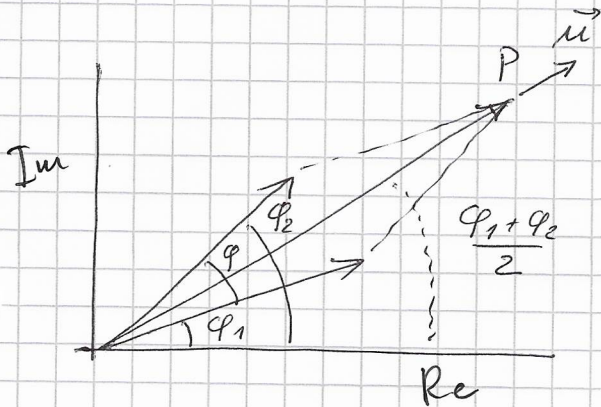
• Se φ è variabile (incoerenti) l'intensità è la somma delle singole intensità -

Ma non si può violare la conservazione dell'energia

Nell'interferenza si ha una ridistribuzione spaziale dell'energia non è persa

Battimenti e Velocità di Gruppo

Sovrapponiamo due onde della stessa natura ma con frequenze leggermente diverse con la stessa direzione e verso $\rightarrow$ battimenti



$$f_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$f_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\varphi_1 = k_1 x - \omega_1 t$$

$$\varphi_2 = k_2 x - \omega_2 t$$

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ e il modulo della somma è $2A \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$

$$\vec{OP} = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \vec{u} \quad (\text{parte reale di } \vec{OP})$$

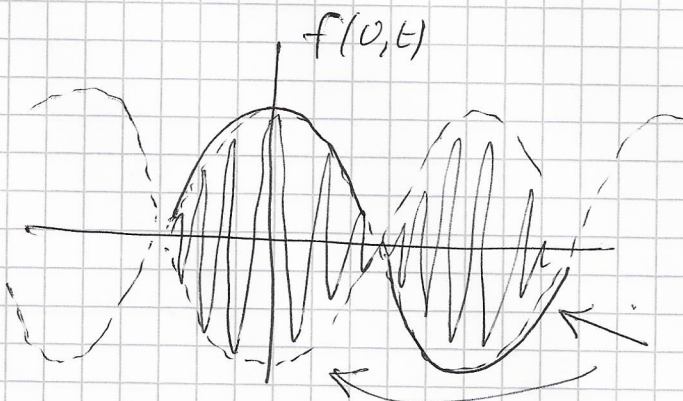
e la sua proiezione sull'asse reale è

$$f = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$$f = 2A \cos\left[\frac{(k_2 - k_1)x}{2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right] \cos\left[\frac{(k_2 + k_1)x}{2} - \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right]$$

Consideriamo $x = 0$

$$f(0, t) = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}$$



$$\pm 2A \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right)$$

valori limite per

$$\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right]$$

L'ampiezza è variabile nel tempo:

Modulazione di Ampiezza AM (onde radio o luminose)

Altro metodo sarebbe la Modulazione di Frequenza FM.

Definendo i valori medi $k_0 = \frac{1}{2}(k_2 + k_1)$ e $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$

e $\Delta k = k_2 - k_1$; $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$

$$f = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

Che ha l'aspetto di un'onda monocromatica con pulsazione ω_0 e "ampiezza"

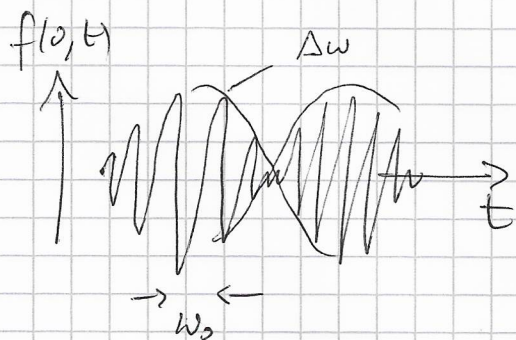
$$A_b = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

variabile con x e t

Nel nostro caso $|\Delta k| \ll k_0$ e $|\Delta \omega| \ll \omega_0$

Le pulsazioni dell'ampiezza hanno periodi molto più lunghi di quello di $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$

Quindi la sovrapposizione di due onde monocromatiche con frequenze vicine produce un'onda che somiglia ad un'onda monocromatica ma ha ampiezza modulata.



a $x=0$

$$f(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(\omega_0 t)$$

Beating temporale a cui

è associata una intensità istantanea

$$I(t) \propto 4A^2 \cos^2\left(\frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos^2(\omega_0 t) = 2A^2(1 + \cos(\Delta \omega t)) \cos^2(\omega_0 t)$$

che rappresenta un'onda di frequenza modulata con una pulsazione $\Delta \omega$



Velocità di Gruppo

Abbiamo visto che l'impulso modulato si comporta come un'onda con numero d'onda $k_b = \frac{1}{2} \Delta k$ e pulsazione $\omega_b = \frac{1}{2} \Delta \omega$, $\lambda_b = \frac{2\pi}{k_b} = \frac{4\pi}{\Delta k}$

* Velocità di gruppo: vel. con cui si muove l'avvolgimento che modula l'impulso dell'onda

Imponendo che l'argomento del cos sia costante

$$\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t = \text{cost} \Rightarrow x = v_g t = \text{cost}$$

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

Nel caso di due onde con vel. di fase $v_f = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1}{k_1}$

si ha anche che $v_g = v_f$.

Se però abbiamo una relazione generale $\omega(k) \neq k v_f$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} \neq \frac{\omega}{k} = v_f}$$

Se poniamo $\omega = k v_f(k)$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

* v_g è importante per un pacchetto d'onde ottenuto dalla sovrapposizione di onde monocromatiche con k diversi distribuiti intorno a k_0

Il luogo dei punti con la massima ampiezza dell'onda

si sposta con $v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k_0}$

Perché l'energia associata ad un'onda dipende dal quadrato della sua ampiezza massima e questa si sposta con vel v_g questa è anche la vel. con cui si trasporta l'energia.