CINEMATICA

Descrizione spaziotemporale del moto dei corpi (puntiformi)

S : riferimento

Legge oraria del moto : equazione vettoriale

vettore velocità + vettore posizione - accelerazione

Meccanica Classica - prima grande sistema di leggi fisiche

tutt'ora alla base del campo - Stimolo allo sviluppo matematico.

Cinematica - descrizione del moto

Dinamica : cause del moto i.e. forze etc.

Posizione e velocità sono relative al riferimento S

Punto geometrico - massa - (punto materiale)

Equazioni vettoriali del moto

* Assunzione di dinamica continua o regolare - differenziabile

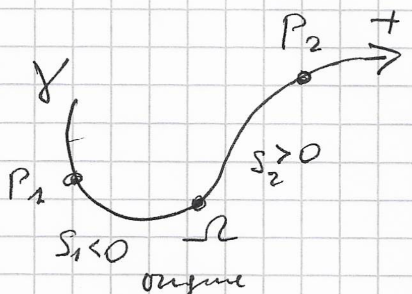
$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t+\Delta t)| \to 0$ per $\Delta t \to 0$

[≠ molecole in un liquido o in un gas * flipper]

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Traiettoria : insieme delle posizioni occupate



rappresentazione della traiettoria ;

ascissa curvilinea

$\vec{r} = \vec{r}(s) \longrightarrow$ $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

$s = s(t)$

equazione della traiettoria in forma parametrica

equazione oraria

Esempio: traiettoria circolare raggio R

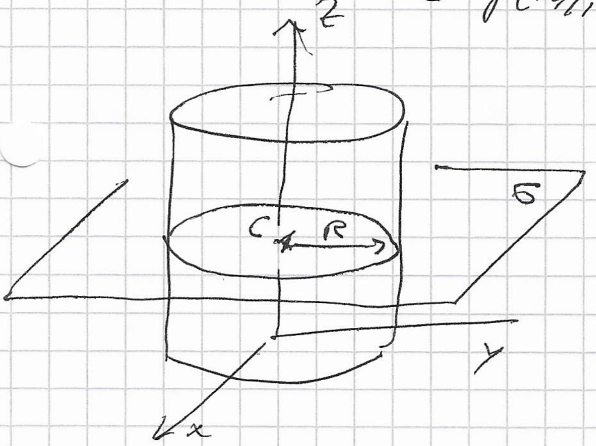
Centro $C=(0,0,R/2)$

Nello spazio $\mathbb{R}$ (con ~~[illegible]~~ coordinate cartesiane ortogonali)
una superficie è rappresentata da una equazione del tipo

$$f(x,y,z)=0$$

curva → intersezione di due superfici

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

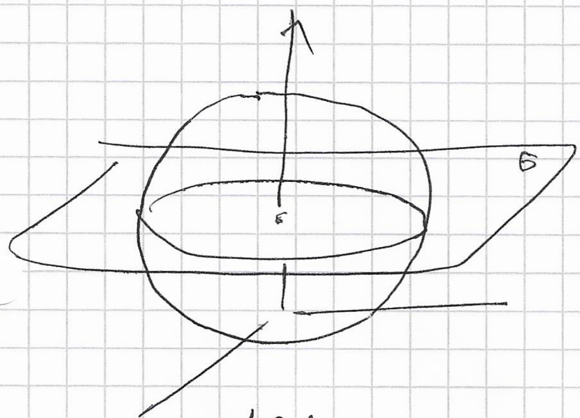


Si possono avere varie rappresentazioni

(a) $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 & \to \text{cilindro} \\ z=\frac{R}{2} & \to \text{piano} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2+y^2+\left(z-\frac{R}{2}\right)^2=R^2 \\ z=\frac{R}{2} \end{cases}$

↑ sfera



Altra rappresentazione con parametro $\alpha \in [0, 2\pi]$

$x=R\cos\alpha$; $y=R\sin\alpha$ $z=\frac{R}{2}$

(rappresentazione parametrica di una curva)

Ascissa curvilinea $s=R\alpha$

$x=R\cos\frac{s}{R}$ $y=R\sin\frac{s}{R}$; $z=\frac{R}{2}$

Se velocità costante $s=kt$ (k costante)

$x = R\cos(\omega_0 t)$ $\quad y = R\sin(\omega_0 t)$ $\quad z = \frac{R}{2}$

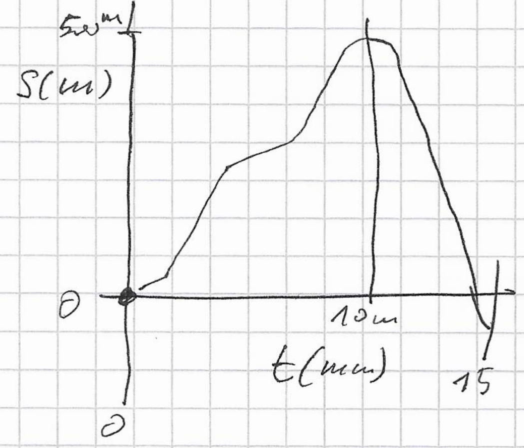
$\omega_0 = \frac{k}{R} \propto [t^{-1}]$

contenuto più geometrico che fisico -

Oltre alla circonferenza rappresentano anche il moto di un punto

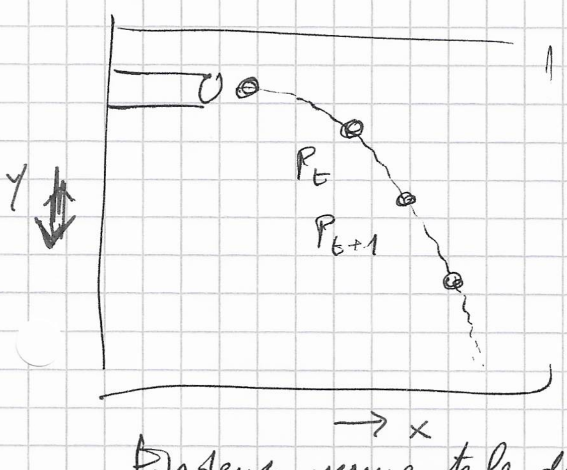
con equazioni orarie $\quad s = (\omega_0 R)\, t$

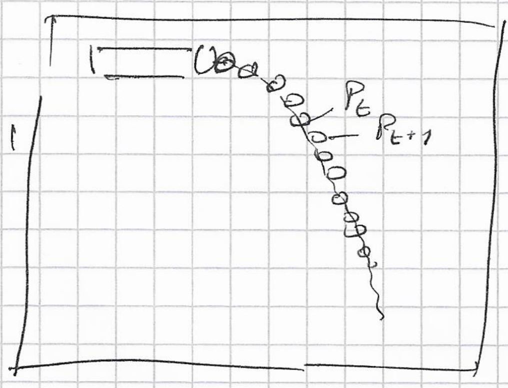
Esempio di equazioni orarie



Velocità

Misure associate di posizione e tempo





Evidenza sperimentale della continuità del moto - Regolarità

≈ parabola -

Vettore velocità

$t \; ; \; t' = t + \Delta t$

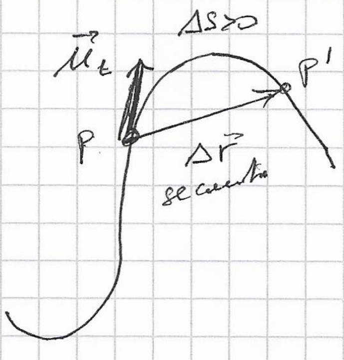
$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$

velocità media $\quad \vec{V}_m = \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ (non dipende dal percorso i.e. Tutor in strada)

Velocità istantanea

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

$\vec{V}$ è la derivata del vettore posizione rispetto al tempo



$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\vec{PP'}|}{|\Delta s|} = 1$$

secante → tangente

Misura della rapidità con cui viene percorsa la traiettoria.

Rappresentazione intrinseca della traiettoria

$\Delta \vec{r} = \vec{PP'}$ $\qquad$ versore tangente

$P \to s$

$P' \to s + \Delta s$

$$\vec{u}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{u}_t \to \vec{V}$ è tangente alla traiettoria

modulo $\left|\dfrac{ds}{dt}\right|$ e il verso è quello di $\vec{u}_t$

$v_s = \dfrac{ds}{dt}$ = velocità scalare

rappresentazione intrinseca $\quad \vec{V} = v_s \vec{u}_t = \dot{s}\, u_t$

Per il moto circolare

$s = (\omega_0 R) t \qquad v_s = \dfrac{ds}{dt} = \omega_0 R \; (\gtrless 0)$

Se v_s = cost. → moto circolare uniforme.

Moto → successione di spostamenti infinitesimi $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

Lo spazio percorso è quindi la somma di questi spostamenti

$$|ds| = |\vec{v}|\,dt \equiv v\,dt$$

Spazio percorso $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\,dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ (solo ≥ 0)

$\neq$ distanza dalla partenza

L'integrale della velocità scalare dà la differenza tra i valori iniziali e finali dell'ascissa curvilinea

$$\Delta s \equiv s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_s(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\,dt \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds$$

Tachimetro → modulo della vel. scalare

Contachilometri → spazio percorso

$[v] = [M^0 L T^{-1}]$ in SI $v \to m/sec.$

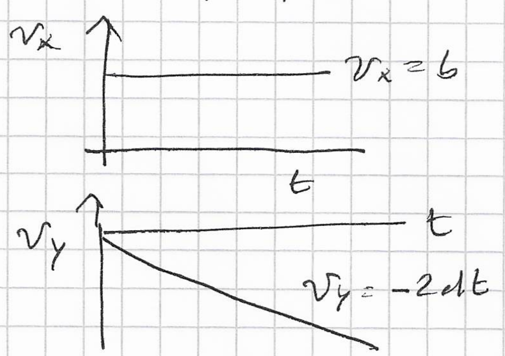
Rappresentazione cartesiana

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Esempio precedente



$$x(t) = bt \qquad y(t) = c - d \cdot t^2$$

$$v_x = b \qquad v_y = -2d \cdot t$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{2d}{b}t$$

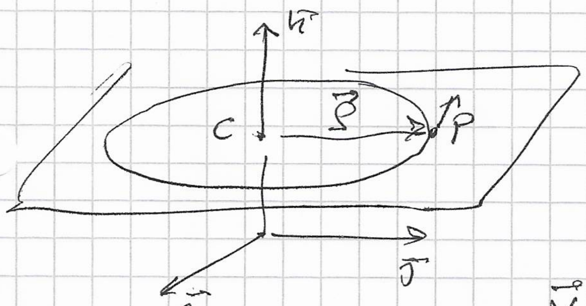
Dati l'eq. vettoriale del moto di una particella

$$\vec{r} = (2\alpha t^2)\vec{i} + \beta(2t + t_0)\vec{j} + 4\delta\vec{k}$$

Trovare le componenti cartesiane della velocità e il suo modulo

$$\begin{cases} \dot{x} = 4\alpha t \\ \dot{y} = 2\beta \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{v} = (4\alpha t)\vec{i} + (2\beta)\vec{j} \\ v = \sqrt{16\alpha^2 t^2 + 4\beta^2} \end{cases}$$

Moto rotatorio: esprimere la velocità in coordinate cartesiane



$$\vec{r} = (R\cos\omega_0 t)\vec{i} + (R\sin\omega_0 t)\vec{j} + \frac{R}{2}\vec{k} =$$

vettore rapp. nel piano

$$= \vec{\rho} + \frac{R}{2}\vec{k}$$

$$\vec{v} = (-\omega_0 R \sin(\omega_0 t))\vec{i} + (\omega_0 R\cos(\omega_0 t))\vec{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-\omega_0 R\sin(\omega_0 t))^2 + (\omega_0 R\cos(\omega_0 t))^2} = |\omega_0| R$$

$$\vec{\rho}\cdot\vec{v} = (\vec{r} - \tfrac{R}{2}\vec{k})\cdot\vec{v} =$$

$$= \left[(R\cos(\omega_0 t))\vec{i} + (R\sin(\omega_0 t))\vec{j}\right]\left[(-\omega_0 R\sin\omega_0 t)\vec{i} + (\omega_0 R\cos\omega_0 t)\vec{j}\right] =$$

$$= -\omega_0 R^2 \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) + \omega_0 R^2 \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) = 0 \quad ✓$$

Esempio $\quad \vec{r} = A(e^{\alpha t}\vec{i} + e^{-\alpha t}\vec{j}) \quad (A, \alpha > 0)$

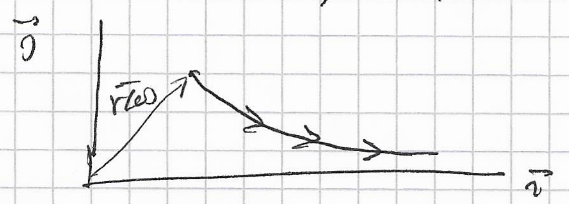
Determinare velocità e traiettoria

$$v_x = A\alpha e^{\alpha t}\ ;\ v_y = -A\alpha e^{-\alpha t} \longrightarrow \vec{v} = A\alpha(e^{\alpha t}\vec{i} - e^{-\alpha t}\vec{j})$$

$$v = A\alpha\sqrt{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}$$

per $t = 0 \quad \vec{r}(0) = A(\vec{i} + \vec{j})\ ;\ \vec{v}(0) = A\alpha(\vec{i} - \vec{j})$

Per $t \to \infty \quad \vec{r}_y$ e $\vec{v}_y \to 0 \quad \vec{r}_x, \vec{v}_x \to \infty$



Esempio

Data la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = 2t+1 \\ z = 0 \end{cases}$$

calcolare la vel istantanea

$v_x(t) = x'(t) = 4t$

$v_y(t) = 2$

$v_z(t) = 0$

$\vec{v}$ giace nel piano (x, y) perché $v_z = 0$

modulo $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{16t^2+4} = 2\sqrt{4t^2+1}$

Angolo tra v_x e v_y

$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2t}$

Legge oraria

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t+1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Calcolare la vel. media relativa nell'intervallo $t_1 = 0$ e $t_2 = 5$ (CGI)

$$\bar{v}_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 - 2t_1}{t_2 - t_1} = 2\ m/s$$

$$\bar{v}_y = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(2t_2 + 1) - (2t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = 2\ m/s$$

$$\bar{v}_z = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{4-4}{t_2 - t_1} = 0\ m/s$$

$\bar{v}$ è costante in modulo e direzione → moto rettilineo uniforme

$v_z = 0$ $\vec{v}$ giace nel piano (x, y)

Angolo rispetto all'asse x è $\Phi = 45° = \frac{\pi}{4}$

Modulo della velocità media

$$\bar{v} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2} = \sqrt{4+4+0} = 2.82\ m/s$$

Legge oraria

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Calcolare la vel. media nell'intervallo $t_1 = 1$ e $t_2 = 5$

$$\bar{v}_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2^2 - 2t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{2(25-1)}{4} = 12\ m/s$$

$$\bar{v}_y = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(2t_2+1) - (2t_1+1)}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2\ m/s$$

$$\bar{v}_z = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = 0\ m/s$$

v.e. tra $t_1 = 1$ e $2t_2 = 4$

$$\bar{v}_x = \frac{2(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \frac{2(16-1)}{3}$$

NB: La media di V_x cambia con l'intervallo considerato

Auto percorre di 50 Km in 1 ora e poi torna al punto di partenza in 2 ore totali.

~~vel. istan~~

Vel media tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$

e poi tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 2h$ + vel istantanea

$$\bar{v}(0-1) = \frac{50 km}{(1-0)h} = 50\ km/h$$

$$\bar{v}(0-2) = \frac{0 km}{(2-0)h} = 0\ km/h$$

vel. istantanea : non definita.

Accelerazione

a. media $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt}}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Componenti cartesiane

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

$$[a] = [M^0 L T^{-2}] \quad (m/s^2)$$

Esempio precedente:

$$\begin{cases} \vec{r} = (2\alpha t^2)\,\vec{i} + \beta(2t+t_0)\,\vec{j} + 4\delta\vec{k} \\ \vec{v} = (4\alpha t)\,\vec{i} + (2\beta)\,\vec{j} \\ \vec{a} = 4\alpha\,\vec{i} \end{cases}$$

Moto rotatorio

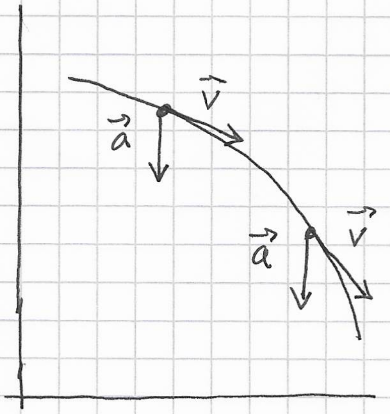
$$\vec{r} = (R\cos(\omega_0 t))\,\vec{i} + (R\sin(\omega_0 t))\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = (-\omega_0 R\sin(\omega_0 t))\,\vec{i} + (\omega_0 R\cos(\omega_0 t))\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = (-\omega_0^2 R\cos(\omega_0 t))\,\vec{i} + (-\omega_0^2 R\sin(\omega_0 t))\,\vec{j} = -\omega_0^2\vec{r}$$

NB: $\vec{a}$ ed $\vec{r}$ hanno in ogni istante la stessa direzione ma versi opposti

Espressione intrinseca dell'accelerazione



Moto con accelerazione verticale costante

$\vec a$ riflette tutti i cambiamenti di $\vec v$ in modulo e direzione

Importante evidenziare i diversi contributi

Ricordando che

$$\vec v = v_s \vec u_t = \dot s\, \vec u_t \qquad (v_s:\ \text{velocità scalare})$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_s \vec u_t\right) =$$

$$= \frac{dv_s}{dt}\vec u_t + v_s \frac{d\vec u_t}{dt}$$

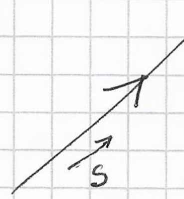
ma $v_s = \frac{ds}{dt}$ quindi il I° termine è anche

$$\vec a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec u_t \equiv \ddot s\, \vec u_t \qquad (\text{acc. tangenziale})$$

Il versore tangente $\vec u_t = \frac{d\vec r}{ds}$ dipende dalla forma della traiettoria

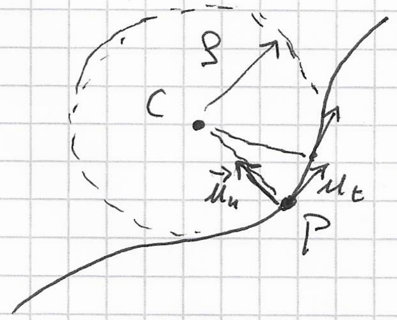
$$\frac{d\vec u_t}{dt} = \frac{d\vec u_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot s \frac{d\vec u_t}{ds}$$

NB: $\frac{d\vec u_t}{ds}$ è una caratteristica intrinseca della traiettoria mentre $\dot s$ è la velocità di percorrenza



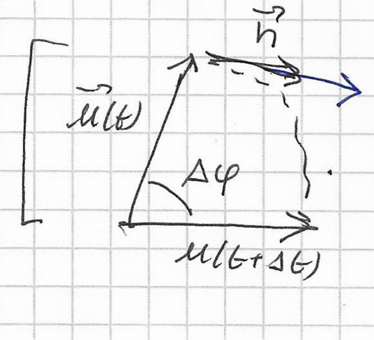
traiettoria dritta

$$\frac{d\vec u_t}{ds} = 0$$



Traiettoria curva

$$\frac{d\vec u_t}{ds} \neq 0$$



ricordando che

$$\frac{d\vec u}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec n$$

$$\frac{d\vec u_t}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\vec u_n$$

con $\vec u_n \perp \vec u_t$

Localmente un elemento di curva può essere approssimato con un arco di circonferenza.

$C(P)$ = centro di curvatura e ρ raggio di curvatura

poiché $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$ $\longrightarrow$ $\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_n$

quindi

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{acc. tangente}}}{a_t}\vec{u}_t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{acc. normale}}}{a_n}\vec{u}_n = \ddot{s}\,\vec{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{u}_n}$$

* rappresentazione intrinseca in termini dei versori

sempre > 0 cioè punta sempre al centro di curvatura

Acc. centripeta

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n}$$

È sempre presente in ogni moto su traiettoria non rettilinea. $\longrightarrow$ Ogni moto con traiettoria curva è accelerato

i.e. Auto
- acceleratore // freno $\longrightarrow$ $\vec{a}_t$
- volante $\vec{a}_n$

rapp. cartesiana

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

rapp. intrinseca

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

NB: Le componente tangenziale dell'accelerazione è connessa alla variazione nel tempo del modulo della velocità

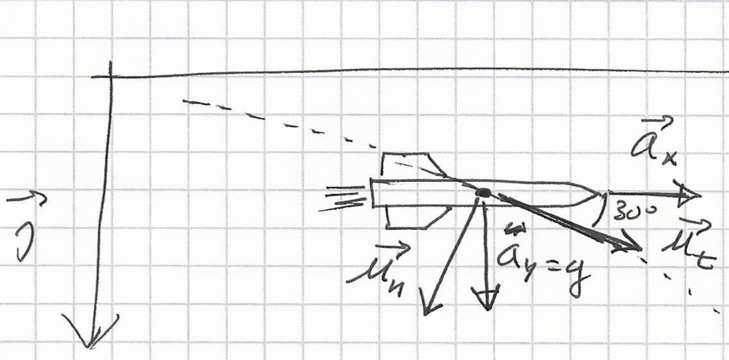
$$\vec{v} = v\,\vec{u}_v$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v + v\frac{d\vec{u}_v}{dt}$$

tangenziale

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_v$$

Esempi di uso delle varie rappresentazioni.



$a_x = 5\, m/s^2$ dai motori

$a_y = 9\, m/s^2$ gravità ad alta quota

Ad un tempo t $\quad v = 25.000\ Km/h$ inclinata di $30° = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} \vec{u}_t = \cos(\pi/6)\,\vec{i} + \sin(\pi/6)\,\vec{j} \\ \vec{u}_n = -\sin(\pi/6)\,\vec{i} + \cos(\pi/6)\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{a} = (5\vec{i} + 9\vec{j})\ m/s^2$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{u}_t \quad ; \quad a_n = \vec{a}\cdot\vec{u}_n$$

$$a_t = a_x \cos(\pi/6) + a_y \sin(\pi/6)$$

$$a_n = -a_x \sin(\pi/6) + a_y \cos(\pi/6) \quad / \text{chiaro}$$

$$\vec{a} = (\underset{\substack{\uparrow \\ a_t}}{8.8}\,\vec{u}_t + \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{5.3}\,\vec{u}_n)\ m/s^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = 9099\ Km \rightarrow (\text{piccola curvatura})$$

Come cambia il modulo della velocità

$$|v| \leftrightarrow |a_t| = 8.8\ m/s^2$$

Classificazione dei moti elementari

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\,\vec{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\,\vec{u}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{u}_n \end{cases}$$

$v_s = \dot{s} = cost \rightarrow$ moti uniformi

$\rho =$ costante $\rightarrow$ moto circolare.

NB: nei moti uniformi il vettore velocità può variare ogni moto su una traiettoria curva è accelerato.

<u>Moti con $\dot{s} = cost = \dot{s}_0$</u>

$$s(t) = \int \dot{s}(t)\,dt + C = \dot{s}\,t + C = \dot{s}_0\,t + s_0$$

e il valore di C è definito da $s_0 = s(t_0)$

<u>Moti con $\ddot{s} = cost = \ddot{s}_0$</u>

$$\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}_0 \qquad t_0 = 0$$

$$d\dot{s} = \ddot{s}_0\,dt \qquad \int d\dot{s} = \boxed{\dot{s} = \int \ddot{s}_0\,dt = \ddot{s}_0\,t + \dot{s}_0}$$

Legge in cui varia nel tempo la velocità scalare

$$\frac{ds}{dt} = \ddot{s}_0\,t + \dot{s}_0$$

$$ds = \ddot{s}_0\,t\,dt + \dot{s}_0\,dt$$

$$\int ds = \int \ddot{s}_0\,t\,dt + \int \dot{s}_0\,dt = \ddot{s}_0 \int t\,dt + \dot{s}_0 \int dt$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\ddot{s}_0\,t^2 + \dot{s}_0\,t + s_0}$$

Legge oraria dei moti accelerati con acc. tang. costante

Moti rettilinei

NB: nella rappresentazione cartesiana ogni moto è sempre la somma di 3 moti rettilinei

Moto rettilineo uniforme

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

NB: solo in questo caso $\vec{v}$ non cambia nel tempo

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0$$

Esempio: un punto si muove di moto rett. unif. acc. con $a_0 = 5 m/s^2$. A $t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 10m$, $t_2 = 2s \rightarrow v_2 = 2 m/s$

determinare posizione e vel. a $t^* = 10 sec.$

$$v^* = v_2 + a_0 (t^* - t_2) = 42 m/s$$

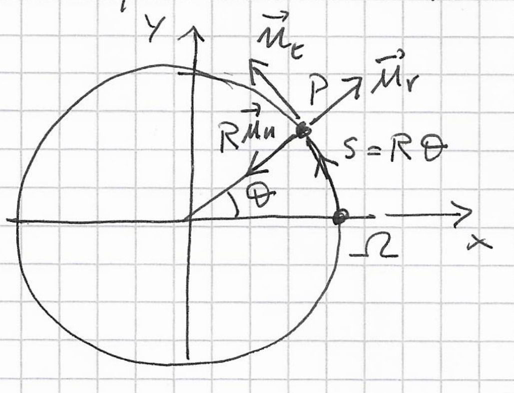
$$v_1 = v_2 + a_0 (t_1 - t_2) = 12 m/s$$

$$x^* = \frac{1}{2} a_0 (t^* - t_2)^2 + v_1 (t^* - t_1) + x_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 + 10 = 172 m$$

Moti circolari

Geometria e versori intrinseci



Equazioni parametriche

$$x = R \cos\theta \qquad (z = 0)$$

$$y = R \sin\theta$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{R} = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}$$

versore del vettore posizione

Origine ~~detta~~ della coord. curvilinea $\Omega\ (R,0,0)$

e direzione antioraria

$$s = R\theta \qquad (0 \le s < 2\pi R)$$

La traiettoria è rappresentata dall'eq. vettoriale

$$\vec r(s) = R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec i + R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec j = R\cos\theta\,\vec i + R\sin\theta\,\vec j$$

Il centro di curvatura coincide con O e il raggio con R

$$\vec u_t = \frac{d\vec r}{ds} = \frac{d\vec u_r}{d\theta}\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}} = -\sin\theta\,\vec i + \cos\theta\,\vec j$$

$$\vec u_n = R\frac{d\vec u_t}{ds} = \frac{d\vec u_t}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec i - \sin\theta\,\vec j = -\vec u_r$$

da cui segue che $\vec u_t \perp \vec u_r$

Equazioni orarie $s(t)$ oppure $\theta(t)$

Moto circolare uniforme : $\dot\theta_0 = \dfrac{v_0}{R}$

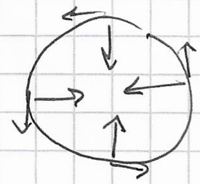
$$\theta(t) = \frac{v_0}{R}(t-t_0) + \theta_0$$

Essendo $\ddot s = 0$ l'accelerazione ha solo componente normale

$$\vec a = \frac{\dot s^2}{R}\vec u_n \equiv \frac{v_0^2}{R}\vec u_n$$

→ ~~acc~~ nel moto circolare uniforme l'acc. è $\neq 0$ ed è centripeta.

Modulo costante ma non direzione



$$\theta = \omega t \qquad ; \qquad s = \omega R t$$

$$\begin{cases} \vec r = R\cos(\omega t)\,\vec i + R\sin(\omega t)\,\vec j \\ \vec v = -\omega R\sin(\omega t)\,\vec i + \omega R\cos(\omega t)\,\vec j = \omega R\,\vec u_t \\ \vec a = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\vec i - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\vec j = -\omega^2\vec r \end{cases}$$

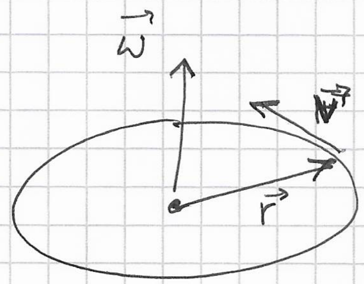
Ricordando che per la derivata di un versore

$$\frac{d\vec u}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec n = \vec\omega\times\vec n$$

$\vec\omega$ ha modulo $\dfrac{d\varphi}{dt}$, direzione $\perp \bar\sigma$

u?

e verso tale che rot. è antioraria



$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$$

$\vec{\omega}(t)$ = vettore velocità angolare

NB: consistenza con l'espressione $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_t$

$\vec{\omega} \parallel \vec{k}$ verifichiamo che $\vec{u}_t = \vec{k} \times \vec{u}_r$

$\vec{k} \times \vec{u}_r = \vec{k} \times (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = (\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{i}) = \vec{u}_t$

Accelerazione angolare

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k} \quad (\perp \text{ al piano del moto})$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

per moto circolare uniforme $\boxed{\vec{a} = -\omega^2\vec{r}}$

Nel caso di O centro ~~[illegible]~~ $\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega}$ terna ortogonale destra

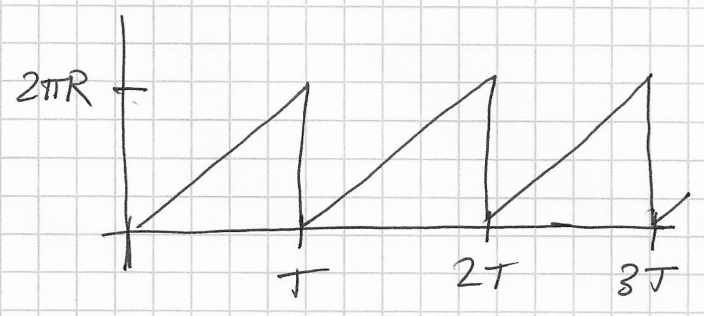
Il modulo del prodotto triplo è il prodotto dei tre moduli $\omega^2 R$

[Prodotto triplo $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$|\vec{d}| = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$]

anche da qui $|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \vec{\omega}\underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=\emptyset} - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 r$

Periodicità del moto circolare uniforme



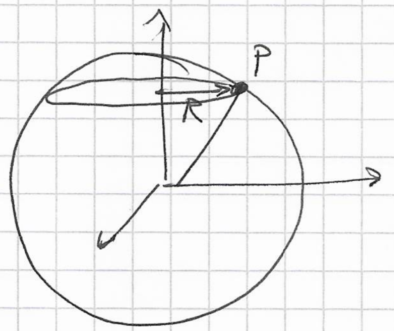
$\vec{r}, \vec{v}$ e $\vec{a}$ si ripetono periodicamente con periodo T

$\vec{r}(t + nT) = \vec{r}(t)$

$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ periodo (fondamentale)

$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ frequenza $\qquad \boxed{\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$ pulsazione

"numero di giri per unità di tempo"



Calcolare moduli di velocità e accelerazione di un corpo nel punto P a latitudine λ

$R = R_T \cos\lambda \qquad R_T = 6.4\times 10^6\ m$

$T = 24h$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.27\times 10^{-5}\ rad/sec$$

$$v = \omega_0 R = \omega_0 R \cos\lambda = 465\,(\cos\lambda)\ m/s$$

$$a = \omega_0^2 R = \omega_0^2 R_T \cos\lambda = 3.38\times 10^{-2}\,(\cos\lambda)\ m/s$$

08/03/2016

Equazioni differenziali del moto circolare uniforme

Abbiamo visto che per il moto circ. unif. $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r}}$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t)} \quad ; \quad \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 y(t)}$$

equazioni differenziali la cui soluzione è del tipo

$$\boxed{f(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)}$$

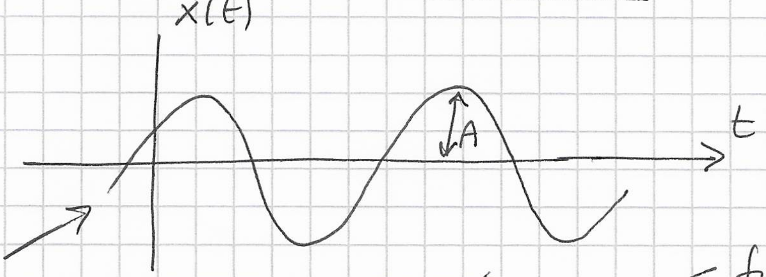
[NB: anche $A\cos\omega t + B\sin\omega t$]

$$\frac{df(t)}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega_0^2 f$$

$\boxed{\text{Moto oscillatorio armonico}}$ -

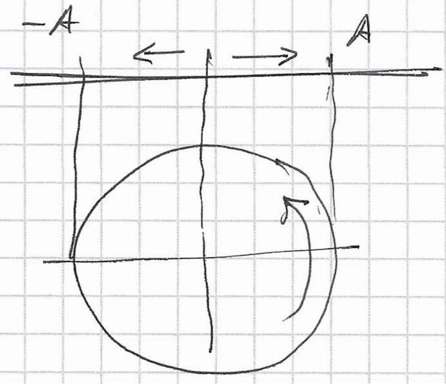
Punto su una retta con legge oraria



Legge oraria
non traiettoria

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$ fase iniziale

A = ampiezza $\propto [L]$

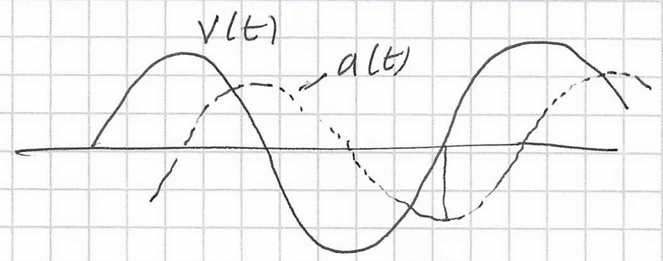


$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$v_x \equiv \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a_x \equiv \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= -\omega_0^2 x$$

Velocità e accelerazione sono periodiche ma sfasate



$$\begin{cases} x(0) \equiv x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_x(0) = v_{0x} = -\omega_0 A \sin\varphi_0 \end{cases}$$

$$x_0^2 = A^2\cos^2\varphi_0$$
$$v_{0x}^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2\varphi_0$$

$$\begin{cases} \tan\varphi_0 = -\dfrac{v_{0x}}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

$$A^2 = \frac{x_0^2}{\cos^2\varphi_0}$$

$$x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2} = A^2(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)$$

Equazione fondamentale

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Eq. differenziale del moto oscillatorio armonico
i.e. anche su una traiettoria qualunque

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0$$

è il caso delle piccole oscillazioni del pendolo

Moti periodici

Il moto armonico ha una importanza fondamentale

Ogni altro moto periodico può essere ricondotto ad una combinazione di moti oscillatori armonici

Teorema di Fourier

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

[Anche di più le onde sono un insieme completo di vettori]

Ogni moto periodico - comunque complesso - può essere considerato come sovrapposizione di moti armonici semplici -

---

Moto piano in coordinate polari

Sistemi cartesiani convenienti per moti rettilinei o in cui l'accelerazione è costantemente // ad una direzione data.

In altri casi (rotazione, moti piani centrali etc) le coordinate polari possono essere più comode

accel. diretta verso un punto

La scelta delle coordinate può anche essere imposta dal sistema di misura v.e. moto dei missili - radar → coord. polari

Ogni vettore nel piano → distanza e angoli

si può esprimere in termini dei versori $\vec{u}_r(P)$ e $\vec{u}_\theta(P)$

componente radiale (↑ $\vec{u}_r$) — componente trasverso (↑ $\vec{u}_\theta$)

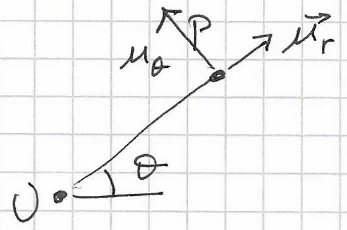
$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \boxed{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad ; \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$



$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}u_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{} + \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r \qquad ✓$$

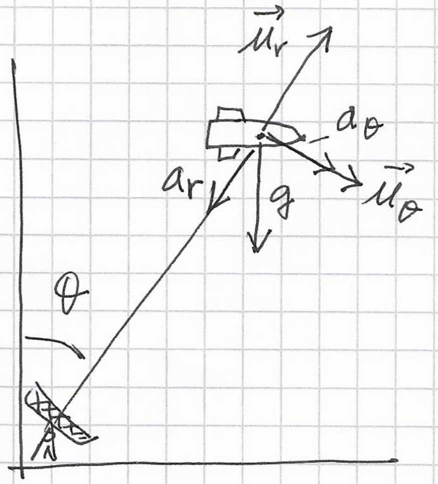
$$\begin{cases} \vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

Moto circolare in coordinate polari

$r = R = \text{cost} \qquad \dot{r} = 0 \; ; \; \ddot{r} = 0 \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$

$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} \qquad (a_\theta = a_t \; ; \; a_r = -a_n)$



Missile a motori spenti

Dalle misure risulta che

All'istante in cui $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $r = 80$ Km

risulta $\dot{r} = 1$ Km/s e $\dot{\theta} = \frac{1 \text{ grad}}{s} = \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

L'acc. è solo dovuta a $g = 9.6\ m/s^2$

Calcolare il modulo di v e i valori di $\ddot{r}$ e $\ddot{\theta}$ all'istante considerato

$$v = \sqrt{\underset{v_r^2}{\dot{r}^2} + \underset{v_\theta^2}{r^2\dot{\theta}^2}} = 1717\ m/s$$

Le componenti polari di $\vec{a}$ sono

$$a_r = -g\cos\theta \quad ; \quad a_\theta = g\sin\theta$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = 17.58\ m/s^2 \quad ;$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = -3.51 \times 10^{-4}\ rad/sec^2$$

Moto con accelerazione costante: i gravi

Problema inverso: se conosciamo $\vec{a}(t)$ per ogni t (in un dato intervallo) e sono note la posizione e velocità al tempo iniziale t_0 determinare l'equazione vettoriale del moto nell'intervallo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,dt' = \left(\vec{v}(t_0) + \int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t')\right)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' = \left(\vec{r}(t_0) + \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)\right)$$

Gli integrali di vettori si scompongono in integrali per le componenti scalari

$$\vec{w}(t) = w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k}$$

$$\int_0^t \vec{w}(t')\,dt' = \int_0^t \left[w_x(t')\vec{i} + w_y(t')\vec{j} + w_z(t')\vec{k}\right] dt' \; \ldots$$

Nel caso della gravità $\vec{a}(t) = \vec{g} = cost$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{g}\,dt' = \vec{v}_0 + \vec{g}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{v}_0 + \vec{g}(t-t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \vec{g}(t'-t_0)\right] dt' =$$

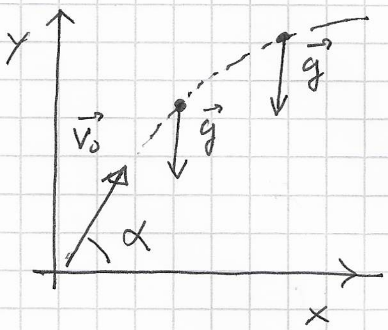
$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t-t_0)^2$$

Sia $\vec{v}$ che $\vec{r}-\vec{r}_0$ si ottengono sommando vettori che hanno direzioni di $\vec{v}_0$ e $\vec{g}$. Rimangono quindi ~~tutti~~ nel piano verticale che contiene la velocità iniziale.

Vedremo che questa traiettoria è una parabola (o una retta)

Coordinate cartesiane

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$$



assumendo che a $t_0 = 0$ il punto è nell'origine

$x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = (v_0\cos\alpha)\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j} \\ \vec{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\vec{i} + \left[(v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\vec{j} \end{cases}$$

Equazioni parametriche della traiettoria

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)\,t \\ y = (v_0\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Lungo l'asse x il moto è rettilineo uniforme

Lungo y il moto è uniformemente accelerato con accelerazione ~~g~~ $-g$.

Le due componenti sono scorrelate e il moto si può rappresentare come la composizione di due moti rettilinei indipendenti.

Questa indipendenza non è generale i.e. se $\vec{a}$ dipendesse da $\vec{v}$ (resistenza dell'aria) la scomposizione e studio separato non è possibile.

Eliminando t si ottiene la traiettoria in forma esplicita

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad ; \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = (\tan\alpha)\, x - \left(\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2$$

$\rightarrow$ parabola con concavità verso il basso.

Quota massima raggiunta

$$\frac{dy}{dx} = (\tan\alpha) - 2\left(\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^* = 0$$

$$\rightarrow x^* = (\tan\alpha) \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}$$

che è effettivamente max poiché $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_{0x}^2}$ è < 0.

sostituendo in y si ottiene

$$y^* = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

Calcolare poi la velocità in funzione di x, y e il raggio di curvatura

09/03/2016

+ esercizio a casa

$\frac{dy}{dx}$ è il coeff. angolare della retta tangente alla curva

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\, x$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\tan\alpha - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\, x\right) v_0\cos\alpha =$$

$$= v_0\sin\alpha - \frac{g}{v_0\cos\alpha}\, x$$

$$\vec{V} = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + \left(v_0\sin\alpha - \frac{g}{v_0\cos\alpha}\, x\right)\vec{j}$$

Raggio di curvatura $\rho = \frac{v^2}{a_n}$

$$v_y = v_x\tan\theta$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 + v_x^2\tan^2\theta = v_x^2(1+\tan^2\theta)$$

NB: $1+tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

anche $\vec{a}_n$ forma con $\vec{g}$ un angolo θ $\qquad \frac{1}{\cos\theta} = (1+tg^2\theta)^{1/2}$

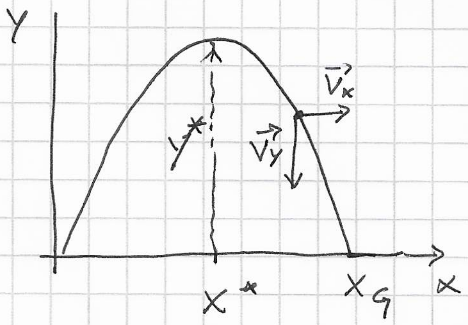
$$\rho = \frac{v_x^2(1+\tan^2\theta)}{g\cos\theta} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}(1+\tan^2\theta)^{3/2} = \frac{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Consideriamo adesso un proiettile $(0 \le \alpha \le \pi)$.

Determinare a che t raggiunge la quota max e poi la gittata

Consideriamo solo il moto verticale $(v_y = v_0\sin\alpha - gt)$

La quota cresce fino a che v_y è >0



Dalle equazioni precedenti questo corrisponde a $v_0\sin\alpha = gt$

cioè $t^* = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$

che inserito in ~~Y~~ $Y(t)$ da

$$y^* = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{1}{2} g t^{*2}$$

$$y^* = (v_0 \sin\alpha)\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$$

~~$x^* = 2 v_0^2 \sin\alpha$~~

$$x^* = v_0 \cos\alpha\, t^* = v_0^2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}$$

Data la simmetria dei due lati della parabola
la gittata ($y=0$) corrisponde a $t_g = 2t^*$ e, dato che
il moto lungo x è uniforme

$$x_g = v_{0x} t_g = 2x^* = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}$$

A parità di v_0 la gittata è max per $\sin(2\alpha) = 1$
cioè per $\alpha = \pi/4$ e $\alpha = (3/4)\pi$ _

NB: La variazione del modulo della velocità dipende
solo dalla variazione della quota

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\,\vec{v}\cdot\vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j} = cost$$

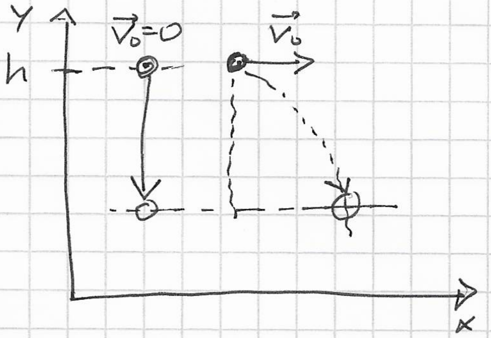
integrando

$$v^2(t) - v_0^2 = 2\vec{a}\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt' = 2\vec{a}\left[\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\right] =$$

$$= -2g(y - y_0) = -2gh \qquad y - y_0 = h$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

Galileo



Due corpi lasciati cadere con v_x diverse
arrivano a terra nello stesso istante

Moto lungo y : $y = h - \frac{1}{2} g t^2$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Moti Relativi

[NB: Cambio di coordinate di un vettore per rotazione del piano]

Dipendenza dal sistema di riferimento

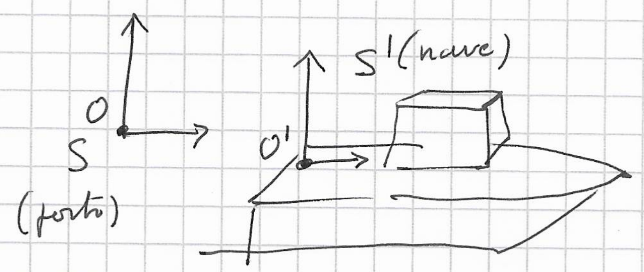
i.e moto rispetto alla Terra (relativo) o moto rispetto al Sole

i.e incidente stradale - descrizioni cambiano a seconda del sistema di riferimento - Gli eventi si esaminano nel sistema solidale con la strada.

La derivazione delle leggi di trasformazione per corpi in movimento richiede ipotesi sulle proprietà dello spazio e del tempo -

Leggi di trasformazione di velocità e accelerazione

Più complesso che il cambio di origine per i vettori (statico)



$\vec{r}\,(\vec{r}\,')$

$\vec{v}\,(\vec{v}\,')$

$\vec{a}\,(\vec{a}\,')$

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} \qquad \vec{R} = \vec{OO'}$

Supponendo che spazio e tempo siano assoluti (NB *)

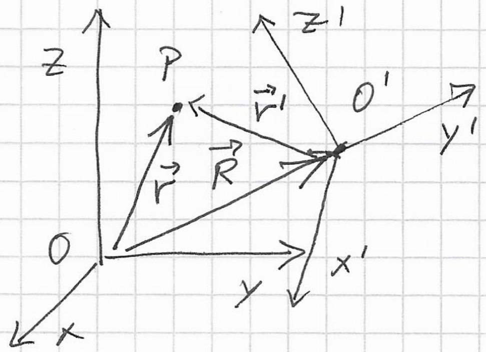
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t}$$

v_t = vel. di trascinamento - vel. del punto in cui ci si trova considerandolo fermo rispetto alla nave.

* Attenzione: non necessariamente il moto della nave è uniforme

* Caso generale: la vel. di un punto P in S è la somma vettoriale della sua velocità v' in S' e della velocità in S del punto P* solidale con S' istantaneamente coincidente con P -

In pratica traslazione + rotazione



In S : $\vec r \equiv \overbrace{(\vec r - \vec R)}^{\vec r'} + \vec R$

In S' può sembrare ovvio dire che la posizione è $\underline{\vec r - \vec R} = \vec r'$

<u>Questo implica due ipotesi:</u> [v.e. relativistici, Lorentz]

1. <u>Che lo spazio sia assoluto</u>, cioè indip. dal sistema di riferimento - Gli osservatori in S ed S' devono avere gli stessi standard di lunghezza e fare le stesse misure

2. <u>Che anche il tempo sia assoluto</u>. Cioè Δt e $\Delta t'$ per lo stesso fenomeno devono coincidere - Definizione di contemporaneità per misurare le stesse distanze

<u>In queste ipotesi $\vec r' = \vec r - \vec R$</u>

Possiamo considerare le variazioni di un generico vettore $\vec W(t)$ osservate nei due sistemi di riferimento e nello stesso $\Delta t = \Delta t'$

$$\vec w = w_x \vec i + w_y \vec j + w_z \vec k = w'_x \vec i' + w'_y \vec j' + w'_z \vec k'$$

Deriviamo $\vec w$ rispetto a t in S a partire dalla sua rappresentazione in S'

$$\left(\frac{d\vec w}{dt}\right)_S = \left(\frac{dw'_x}{dt}\right)_S \vec i' + w'_x \left(\frac{d\vec i'}{dt}\right)_S + \left(\frac{dw'_y}{dt}\right)_S \vec j' + w'_y \left(\frac{d\vec j'}{dt}\right)_S +$$

$$+ \left(\frac{dw'_z}{dt}\right)_S \vec k' + w'_z \left(\frac{d\vec k'}{dt}\right)_S$$

Nell'ipotesi che il tempo sia assoluto si ha

$$\left(\frac{dw'_x}{dt}\right)_S = \left(\frac{dw'_x}{dt}\right)_{S'}$$

Consideriamo poi i termini del tipo $\omega_{x'} \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S$

(a) caso in cui i versori di ~~S~~ T' non cambiano nel tempo la loro orientazione rispetto a T.

(b) Questi versori ruotano

rotazione di $\vec{u}_1$ $(\vec{i}')$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{i}'(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}_1(t) \times \vec{i}'(t) \\ \left(\frac{d\vec{j}'(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}_2(t) \times \vec{j}'(t) \\ \left(\frac{d\vec{k}'(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}_3(t) \times \vec{k}'(t) \end{cases} \qquad \left[\rightarrow \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_S = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t) \right]$$

Relazioni di Poisson (caso generale)

La variazione nel tempo, osservata in un sistema S, per ciascuno dei versori della terna di un altro sistema S', è caratterizzata dallo stesso vettore velocità angolare $\vec{\omega}$, in genere dipendente da t

si può dimostrare che $\rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_i(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}_i(t)$

$[\vec{u}_i = \vec{i}'; \vec{j}'; \vec{k}']$

$\vec{w}_i \rightarrow$ derivate rispetto al tempo in S

sono $\neq 0$ le componenti $\vec{w}_i$ lungo $\vec{u}_l$ con $l \neq i$

$$w_{il} = \left(\frac{d\vec{u}_i}{dt}\right)_S \cdot \vec{u}_l \qquad [\vec{w}_i \perp \vec{u}_i]$$

per $i = 1$

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} = w_{12}\vec{u}_2 + w_{13}\vec{u}_3 \quad \text{etc.}$$

Dato che i versori sono tra loro sempre ortogonali ne segue che

$w_{il} = -w_{li} \rightarrow$ vedi dimostrazione

Ad ogni istante $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_l = 0$, derivando

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right) \cdot \vec{u}_l + \frac{du_l}{dt} \cdot \vec{u}_i = 0 \longrightarrow w_{il} = -w_{li}$$

Di queste 6 relazioni solo 3 sono indipendenti e definiscono una terna di scalari caratteristici del moto della terna di assi T' nel sistema S.

~~$w_1 = w_{23}$; $w_2 = w_{31}$; $w_3 =$~~

$$w_1 = w_{23} \qquad w_2 = w_{31} \qquad w_3 = w_{12}$$

che possono essere considerate le componenti lungo $\vec{u}_i$ di un vettore $\vec{w}$. Questo permette di esprimere la derivata nella forma

$$\left(\frac{d\vec{u}_2}{dt}\right)_S = \vec{w} \times \vec{u}_2$$

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Verifica

$$\vec{w} \times \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = w_3 \vec{u}_2 - w_2 \vec{u}_3 = w_{12} \vec{u}_2 + w_{13} \vec{u}_3 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)_S$$

$$\vec{w} \times \vec{u}_2 = -w_3 \vec{u}_1 + w_1 \vec{u}_3 = w_{21} \vec{u}_1 + w_{23} \vec{u}_3 = \left(\frac{d\vec{u}_2}{dt}\right)_S$$

$$\vec{w} \times \vec{u}_3 = w_2 \vec{u}_1 - w_1 \vec{u}_2 = w_{31} \vec{u}_1 + w_{32} \vec{u}_2 = \left(\frac{d\vec{u}_3}{dt}\right)_S$$

w_1, w_2 e w_3 diciamo le componenti di $\vec{w}$ in S', essendo state ottenute per proiezione sugli assi $\vec{u}_i$ della terna di S'.

Le equazioni delle componenti si possono scrivere in forma vettoriale con un singolo vettore $\vec{\omega}$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right)_S = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t)}$$

$\vec{\omega}(t)$ caratterizza il moto relativo (rotazione) delle due terne di assi:

quindi $\quad w_x'\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_S = \vec{\omega} \times w_x' \vec{i}'$ etc, sommando

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_S = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{W}}$$

Per la velocità

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S$$

$$\left(\frac{dr'}{dt}\right)_S = \left(\frac{dr'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{V} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

essendo $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \left(\frac{dR}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

abbiamo così dimostrato che

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_\tau}$$

$V = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S$ = velocità del punto in S

$V' = \left(\frac{dr'}{dt}\right)_{S'}$ = vel. del punto in S'

ponendo $\vec{V}(t) = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S$

$$\boxed{\vec{V}_\tau = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)]}$$

(a) $\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{V}_\tau$ è indipendente dalla posizione

$$\vec{V}_\tau = V(t)$$

(b) $\vec{\omega} \neq 0$

v_τ varia da punto a punto

Se O' è fermo in S $\rightarrow \vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$ (rotazione)

In genere rototraslazione

Il moto di S' rispetto ad S è caratterizzato

da due vettori $\vec{V}(t)$ e $\vec{\omega}(t)$

Per l'accelerazione la relazione è più complessa

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

$$a_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \rightarrow \text{Coriolis}$$

$$A = \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_S \quad e \quad \vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S$$

10/03/2016

Moto relativo di traslazione rettilinea

Se $\vec{\omega} = 0$ (no rotazione) il moto relativo tra S ed S' è caratterizzato solo da $\vec{V}(t)$: velocità di O' (origine di S') rispetto ad S.

Traslazione rettilinea: $\vec{V}(t)$ costante in direzione e verso (non modulo)

Treno, nave con moto semplice, autostrada .....
scala mobile ...

Versori tra loro paralleli $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, $\vec{\imath}' \vec{\jmath}' \vec{k}'$ $(\vec{\omega} = 0)$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad , \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \qquad \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{V} \ , \ \vec{a}_2 = \vec{A}$$

Trasformazioni di Galileo

Caso particolare $\vec{V}$ indipendente da t – Moto di traslazione rettilineo e uniforme – Importante in Dinamica –

Assumiamo che a $t = 0$ le origini coincidano
in S e S'

$\vec{R}$ vettore posizione di O' rispetto ad O : $\vec{R} = \vec{V}t$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t = \vec{r}' + \vec{V}t' \rightarrow t = t'}$$ Eq. di trasformazione di Galileo.

↳ importanza nei sistemi inerziali

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \ ; \ \vec{a} = \vec{a}'$$

La vel. dipende dal riferimento – non è invariante x trasf. di Galileo – ma la vel. relativa tra due punti $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ è invariante –

Problema: propagazione della luce è indip. dal riferimento. (!)

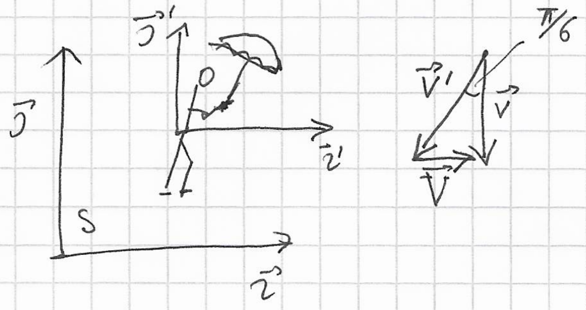
Revisione dei fondamenti concettuali della fisica classica
spazio e tempo assoluti

→ Trasformazioni di Lorentz – in cui $c = \text{cost.}$

Ma se $V \ll c$ Galileo OK.

Esempio. Studente sotto la pioggia inclina l'ombrello di 30°.

$V = 5\,m/s$



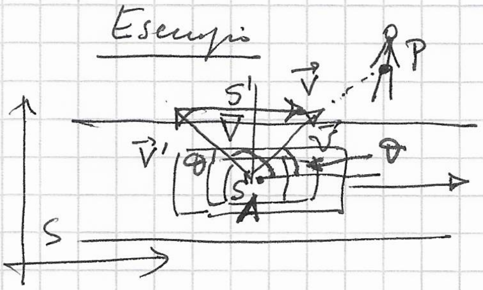
$\vec{v}'$ = vel delle gocce rispetto a S'

$$\underset{S'}{\vec{v}'} + \vec{V} = \underset{S}{\vec{v}}$$

$$v = \frac{V}{\tan\frac{\pi}{6}} = 5\cdot\sqrt{3} = 8.66\ m/s$$

$$v' = \sqrt{v^2+V^2} = 10\ m/s$$

Esempio



Buccia di banana lanciata a $\boxed{45°}$ con $\boxed{v' = 10\ m/s}$

θ angolo tra v e $\vec{i}$ $= \pi/4$

θ' " " v' e $\vec{i}$ $= 3\pi/4$

$$v_x = v\cos\theta = v_x' + V = v'\cos\theta' + V$$

$$v_y = v\sin\theta = v_y' = v'\sin\theta'$$

v_x' è <0 ma se $V > |v_x'|$ si ottiene $v_x > 0$

$$v\cos\theta = v'\cos\theta' + V$$

$$v = v'\frac{\cos\theta'}{\cos\theta} + \frac{V}{\cos\theta}$$

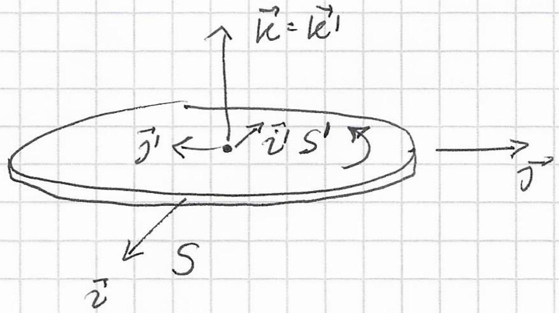
$$v'\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\sin\theta + \frac{V}{\cos\theta}\sin\theta = v'\sin\theta'$$

$$v'\tan\theta\cos\theta' + V\tan\theta = v'\sin\theta'$$

$$v'\cos\theta' + V = v'\frac{\sin\theta'}{\tan\theta}$$

$$V = v'\left(\frac{\sin\theta'}{\tan\theta} - \cos\theta'\right) = v'\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = v'\sqrt{2} = 14.1\ m/s$$

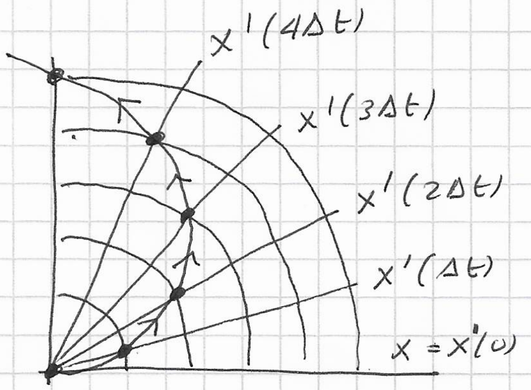
Moto relativo di rotazione



S : $\omega = \text{cost}$

Moto rettilineo e uniforme in S' lungo x' con $\vec v' = \text{cost}$ in S'

In S la traiettoria è curva e quindi il moto è accelerato



$$\begin{cases} r = v_0' t \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

eliminando t si ottiene

$r = \frac{v_0'}{\omega}\theta$ che è il moto di una spirale in coordinate polari

Velocità ed accelerazione nel riferimento S

$\vec v_\tau = \vec\omega \times \vec r$ che ha direzione $\perp \vec r$ e modulo ωr

$$\vec r = \vec r' = \vec v' t = v_0' t \vec i = v_0' t \vec u_r$$

$$\vec v_\tau = \vec\omega \times \vec r = \vec\omega \times (v_0' t \vec u_r) = \omega v_0' t \vec u_\theta$$

quindi $\vec v'$ e $\vec v_\tau$ sono $\perp$ tra loro

In coordinate polari con componenti radiali e trasversali ($\vec u_r$ e $\vec u_\theta$)

$$\vec v = v_0' \vec u_r + \omega v_0' t \vec u_\theta$$

modulo $v = \sqrt{v_0'^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{v_0'^2 + \omega^2 v_0'^2 t^2} = v_0' \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$

Il moto che in S' appare uniforme risulta accelerato in S e su una traiettoria curva.