Meccanica dei Fluidi

* Liquido o gas : L : sistema che può deformarsi con continuità sotto l'azione di forze che tendono a fare scorrere uno strato sull'altro. $N \sim 10^{23}$

Grandezze fisiche: densità e pressione

Forze di superficie e di volume: equazioni della statica di un fluido

Legge di Stevino: relazioni tra pressioni a profondità diverse

→ Principio di Pascal.

Dipendenza della quota della pressione atmosferica.

Legge di Archimede: spinta di un corpo in un fluido

→ Dinamica Euleriana: grandezze fisiche in un certo numero di posizioni $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

Lagrangiana: dinamica di tutte le particelle

Equazioni di continuità - teorema di Bernoulli

Stati della materia → 3 stati

Solido - $\underbrace{\text{Liquido - Gas}}_{\text{Fluidi}}$ → non hanno forma propria

Liquidi - densi quasi come i solidi - poco compressibili

Gas - bassa densità - comprimibili

Gradi di libertà del sistema $3n$ (molecole n) $\sim 10^{23}$

Troppe equazioni cardinali (per i solidi solo 6)

$\boxed{\text{Omogeneità}}$ → valori medi

→ densità e pressione

Densità

Densità media

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \rightarrow \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

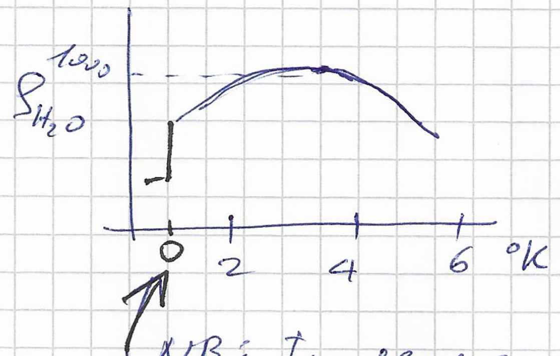
densità assoluta Kg/m^3

densità relativa (rispetto all'acqua)

NB: ipotesi di omogeneità -

$$\rho_r = \frac{\Delta m}{\Delta m_{H_2O}} \text{ (a } 3.8°C \text{ max densità per } H_2O\text{)}$$

$$\rho_r = \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta m_{H_2O}} \rightarrow \rho = \rho_r \cdot \rho_{H_2O}$$



$$\rho_{H_2O} = 1000\, Kg/m^3 = 1\, g/cm^3$$

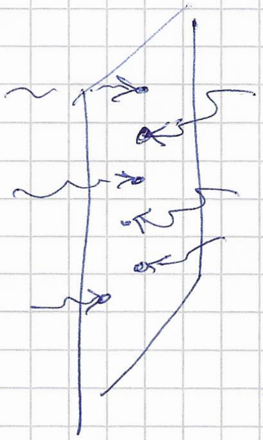
NB: In genere la densità è monotona con T
L'acqua è molto particolare - anche Ghiaccio - Liquido

Liquido	T (°C)	Densità (Kg/m^3)
Alcol etilico	20	791
Benzolo	0	809
Acqua	4	1000
Mercurio	0	13.600 (!)

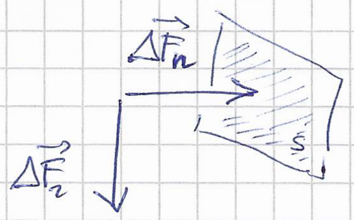
L'acqua a 0°C essendo meno densa occupa la superficie di laghi e fiumi e il ghiaccio si forma in superficie

Pressione

Consideriamo una superficie (ideale) in un fluido



Gli urti delle molecole provocano una forza $\Delta\vec{F}$



Pressione media

$$p_m = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}$$

Pressione in un punto

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}$$

In genere il valore di p non dipende dall'orientazione di dS – + Omogeneità

Pressione: grandezza scalare

Unità: Pascal $1\ Pa = 1\ N\ m^{-2}$ $1\ bar = 10^5\ Pa \simeq 1$ atmosfera

~~18/05/2016~~

Sistema	P (Pa)
Stella di Neutroni	10^{38}
Sole (centro)	2×10^{16}
Laboratori	5×10^{11}
Terra (centro)	$4\cdot10^{11}$
Pneumatico	2×10^{5}
Aria	10^{5}
Pompa da vuoto	10^{-12}
Spazio interstellare	10^{-18}

Azione e reazione

Compressione di un elemento di volume

L'attrazione è trascurabile

Fluido $\neq$ solido.

Componente tangente: sforzo di taglio

$$\vec{T} = \frac{d\vec{F}_t}{dt}$$

Si manifesta soprattutto per i fluidi in movimento – scorrimento.

18/05/2016

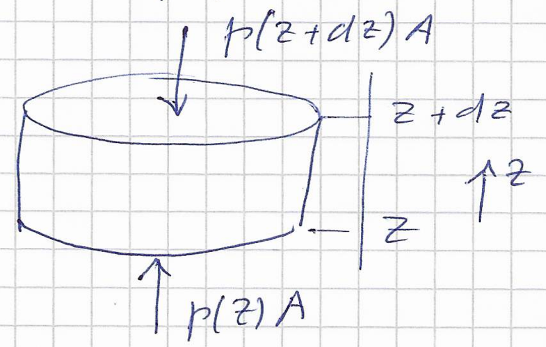
Equazione della statica

$\vec{F}^{(e)} = 0$ (forze esterne)

Forze a distanza: gravitazionali, elettromagnetiche, centrifughe — Volume

Forze di contatto: dovute alle parti di fluido circostante — Superficie

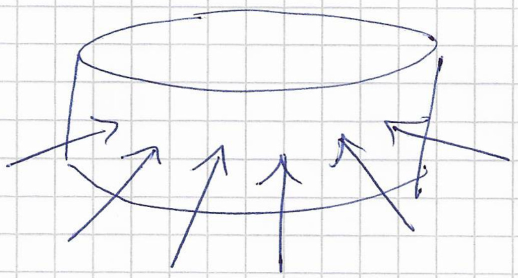
Superficie chiusa in un fluido — porzione di fluido.



Forze agenti: peso e forze del fluido circostante

Senza questa la pressione sarebbe la stessa dovunque.

peso: asse z



Eq. di equilibrio lungo z

$$-\rho g A\, dz + p(z)A - p(z+dz)A = 0$$

ρ: densità

$$p(z+dz) \simeq p(z) + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

Equazione della statica dei fluidi.

Gradiente di p: $\nabla p \equiv \left(0, 0, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$; $\vec{g} \equiv (0, 0, -g)$

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Nel caso di più forze di volume (per unità di massa)

$$\nabla p = \rho \vec{H}$$

e, se H è conservativo

$$\vec{H} = -\nabla\phi$$

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi$$

Le superfici a pressione costante (isobariche) sono anche superfici dove ϕ è costante.

Le superfici libere dei liquidi sono piane e orizzontali.

<u>Esempio</u>: cilindro con liquido di densità ρ che ruota

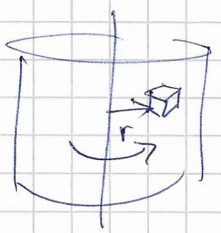
Nel sistema rotante non inerziale: forza centrifuga (conservativa)

Per un elemento di volume dV

$$\Phi\, dm = \rho g z\, dV + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 dV$$

en. pot. complessiva

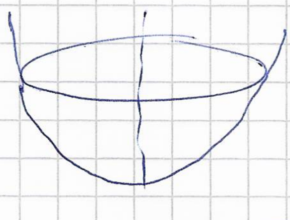
r = distanza dall'asse



Il luogo dei punti con Φ = cost è dato da

$$g z + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{cost}$$

che è un paraboloide di rotazione intorno all'asse z



Legge di Stevino e legge di Pascal

Liquidi - <u>incomprimibili</u> (approssimazione $\simeq$ ok)

$$\rho \simeq \text{cost} \qquad \frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow dp = -\rho g\, dz$$

Integrando tra p_1 e p_2 corrispondenti a z_1 e z_2

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

da cui si desume che

(a) La pressione ha lo stesso valore in posizioni che hanno la stessa quota - superfici isobariche orizzontali

(b) La variazione di pressione è data da $\rho \cdot g$ per Δh.

Sia p_0 il valore della pressione alla superficie libera e p quello a profondità h si ha, indipendentemente dalla forma del recipiente, che

$$\boxed{p(h) = p_0 + \rho g h}$$

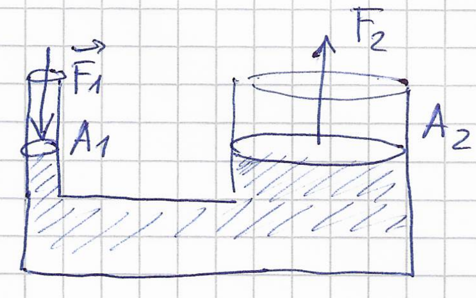
Legge di Stevino

$\rho g h$ = pressione idrostatica

Importante proprietà: se si aumenta la pressione in una data posizione, questo incremento si propaga in tutto il liquido - Principio di Pascal (Legge e non principio)

Dato che la pressione varia solo con la quota.

Torchio idraulico



Applicando F_1 su A_1 la pressione subisce un incremento pari a F_1/A_1 che si propaga in tutto il sistema

Quindi $F_2 = p A_2 = (A_2/A_1)\, F_1$

Moltiplicatore di forza - analogo alla leva.

La corsa Δl_1 è $\gg \Delta l_2$

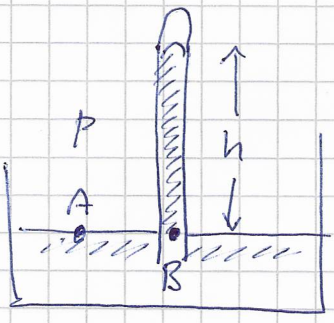
$$\Delta V = A_1 \Delta l_1 \quad \rightarrow \quad \Delta l_2 = \Delta V / A_2 = (A_1/A_2)\, \Delta l_1$$

$$L_2 = F_2 \Delta l_2 = (A_2/A_1) F_1 (A_1/A_2) \Delta l_1 = F_1 \Delta l_1 = L_1$$

Conservazione energia meccanica / Freni auto.

La pressione atmosferica

Prima misura Torricelli - barometro



Tubo di mercurio chiuso.

$h = 760\,mm$.

Allo stesso livello nella vaschetta la pressione è la stessa $P_A = P_B$.

La pressione esercitata dall'atmosfera sul liquido è la stessa alla base della colonna di mercurio alta 760 mm. = 1 atmosfera.

Valore indicativo - dipende dalla quota e può variare con t -
(Atm. non è una unità del SI)

$$1\,atm = 1.013 \cdot 10^5\,Pa = 1.013\,bar = 760\,torr.$$

Se si fa questo esperimento con una bottiglia, la bottiglia non si si svuota.

$$p \simeq \rho g h \qquad \rho = 13600\,kg/m^3 \qquad h = 0.76\,m$$

$$1\,atm = 1.013 \cdot 10^5\,Pa$$

Se invece del mercurio (Hg) si utilizzasse acqua

$$\rho_{H_2O}\, g\, h_{H_2O} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg}$$

rapporto delle densità 0.0.76 $\rightarrow$ 10.34 m.

Dipendenza della pressione atmosferica dalla quota

L'eq. della statica dei fluidi si applica anche ad un gas

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

NB: non si è fatta l'ipotesi di incompressibilità

ρ varia con la quota.

Assumendo che $T = cost$ (rispetto a 300°K) non proprio accurato. e che l'aria si comporti come un gas perfetto

$$\boxed{p \cdot V = cost}$$

è anche costante il rapporto p/ρ

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \qquad \frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

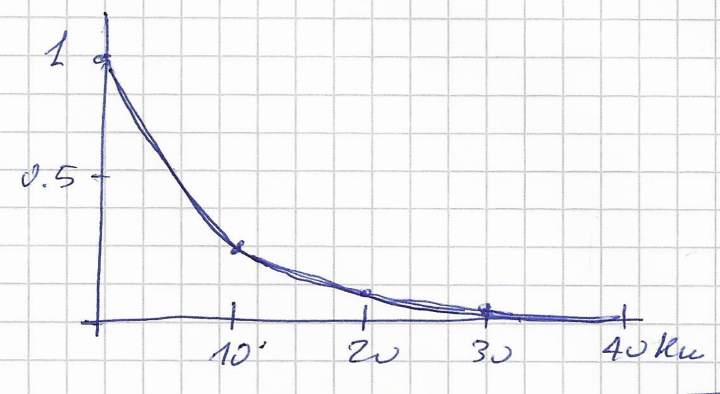
valori di riferimento a livello del mare.

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, p(z) \implies \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, dz$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{\rho_0}{p_0} g \, dz = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^z dz$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\left(\frac{\rho_0}{p_0}\right) g z \qquad \boxed{p(z) = p_0 \, e^{-g\frac{p_0}{\rho_0} z}}$$

e una simile variazione si ha per la densità



Altimetro:

misura della quota dalla pressione

Sviluppando l'exp al I° termine

$$p \approx p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{p_0} g z\right)$$

$\frac{\rho_0}{p_0} g$ = variazione % per metro $= 1.17 \times 10^{-4} \, m^{-1}$

Pressione a 10.000 m dalla formula completa = 0.31 Atm

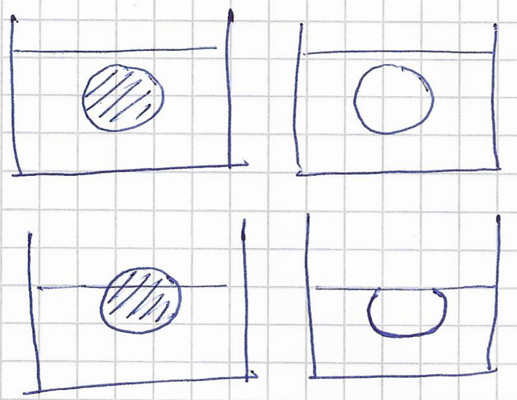
A 10000 m la pressione è 0.31 atm.
All'interno di un aereo $P \simeq 1$ atm
Determinare la forza $\times\, m^2$ sulla superficie dell'aereo

P_{ext} ; P_{in}

$$F = P_{in} S - P_{ext} S = (P_{in} - P_{ext}) S = 7.1 \times 10^4\, N$$

Legge di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato



Stesso volume.

Dato un volume di fluido in equilibrio la somma delle forze si bilancia.

La stessa forza agisce su un corpo.

Condizioni di galleggiamento

Se il corpo C è completamente immerso

peso $\vec{w} = m\vec{g} = \rho_C V \vec{g}$

spinta di Archimede $\vec{f}_A = -\rho_F V \vec{g}$

Se $\rho_F > \rho_C$ la spinta è diretta verso l'alto e viceversa.

Nel galleggiamento si ha l'emersione parziale finché le forze si bilanciano (V_1 = parte immersa)

$$\rho_F V_1 \vec{g} = \rho_C V \vec{g} \Rightarrow V_1 = \frac{\rho_C V}{\rho_F}$$

Galleggiamento stabile: c.d.m. al di sotto ~~della~~ del centro di ~~linea~~ galleggiamento su cui agisce la spinta di Archimede (baricentro del volume spostato)

Galleggiano in acqua tutti i corpi con densità minore dell'acqua. - Olio, benzina, legno -
Le navi sono di ferro ($\rho = 7.9\,\rho_{H_2O}$) ma galleggiano perchè internamente vuote

Analoghe considerazioni si possono fare per il galleggiamento in aria - Palloni aerostatici (H, He) oppure ad aria calda -

Persona sulla bilancia 70Kg soggetta alla spinta dell'aria

$$\vec{W} + \underset{\text{Archimede}}{\vec{f}_A} + \underset{\text{Bilancia}}{\vec{N}} = 0$$

$\vec{W}$ e $\vec{f}_A$ hanno ~~segni opp~~ versi opposti il peso letto è minore -

$$\frac{f_A}{W} = \frac{\rho_{aria}}{\underset{(\simeq \rho_{H_2O})}{\rho_{corpo\ umano}}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

Se si misura 70Kgf il peso effettivo è 70.084 Kgf

Dinamica dei fluidi

- Descrizione Lagrangiana

Descrive il moto di tutte le particelle

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 sono i valori iniziali definiti per ogni particella $N \sim 10^{23}$

Descrizione Euleriana

Grandezze fisiche in un certo numero di posizioni.

Campo di velocità $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$

Si riferisce anche a particelle diverse.

Se indip. da t: <u>moto stazionario</u>.

i.e. flusso costante in un canale.

Linee di flusso: velocità tangenti alla linea.

Non si intersecano altrimenti in un dato punto si avrebbero vel. diverse.

Caratteristiche fisiche: incompressibili o compressibili

viscosi o non viscosi (attrito ~~di taglio~~) interno)

Esempio: <u>cilindro rotante</u> $\vec{\omega}; \vec{k}$

$\vec{v} = \omega\vec{k} \times \vec{r}$

<u>"rotore"</u> del campo di velocità

$\vec{v} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}$

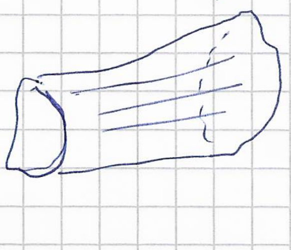
$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k}$$

$\nabla\times$ = rotore

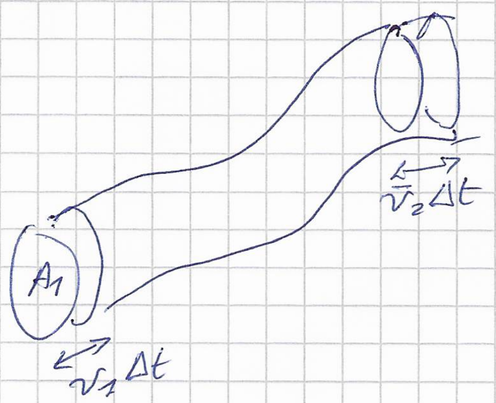
Equazione di continuità

Conservazione della massa (~~moto~~ caso stazionario)

Tubo di flusso: superficie che si ottiene considerando una linea chiusa e le linee di flusso



Le particelle non entrano né escono.



$\rho_1, \rho_2, \quad v_1, v_2$

entra da sinistra

$\Delta M_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$

$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$

$\Delta M_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

esce da destra

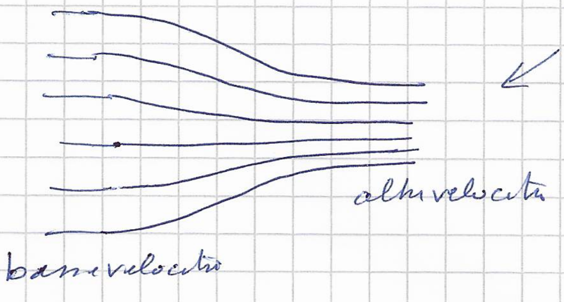
Le porzioni dei due tubi di flusso devono avere la stessa massa (moto stazionario).

$\Delta M_1 = \Delta M_2 \implies \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \text{cost}$

equazione di continuità

e per i fluidi incompressibili $\quad A_1 v_1 = A_2 v_2$

$A v$ = portata



analogo al restringimento di una strada da 2 a 1 corsia

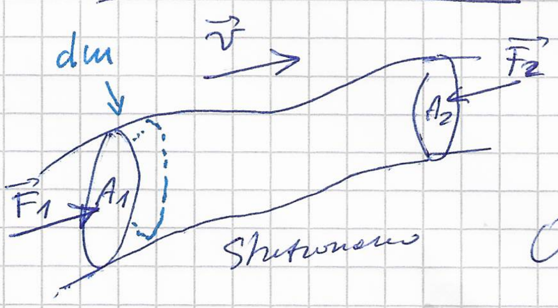
Stringendo il tubo x mantenere la vel. aumenta.

Teorema di Bernoulli

Fluidi ideali, incompressibili e non viscosi

in moto stazionario e non rotazionale

Teorema delle forze vive



Non viscoso: in ogni punto le forze sono ⊥ alla superficie del tubo di flusso

Oltre alla gravità $\vec{F_1}$ ed $\vec{F_2}$

$F_1 = p_1 A_1$, $F_2 = p_2 A_2$

Lavoro eseguito in Δt

$\vec{F_1} \to p_1 A_1 v_1 \Delta t$ $\qquad$ $\vec{F_2} \to -p_2 A_2 v_2 \Delta t$

Lavoro complessivo

$$L_p = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$ $\qquad$ $\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$

$\rho =$ cost (incompressibile)

$L_p + L_g$ (gravità) $=$ variazione energia cinetica

Moto stazionario $\Rightarrow$ ΔK è la variazione di en. cinetica dopo Δt

$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

NB: la parte comune non conta

$L_g = -\Delta V$ $\qquad$ $\Delta V = \Delta m g (h_2 - h_1)$ e per le Forze Vive

$$(p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho} - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + g h_2 = \text{cost}$$

quindi lungo una linea di flusso (Teorema di Bernoulli)

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + g h = \text{cost}}$$

oppure $\qquad \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{g} + h = \text{cost}$

(altezza che deve avere una colonna di fluido

perché la pressione alla base sia p - (altezza piezometrica)

[NB: $p = p_0 + \rho g h$]

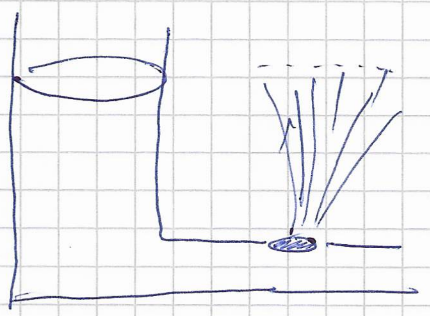
$\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$ è l'altezza da cui deve cadere il fluido per avere vel v - h = altezza effettiva

Teorema di Bernoulli anche

$$h_{piez} + h_{cin} + h_{eff} = cost$$

19/05/2016

questa piezometrica — questa cinetica — questa effettiva



L'acqua risale alla stessa altezza di quella che scende.

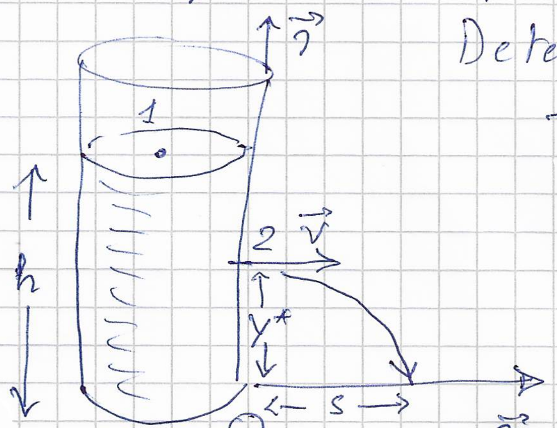
All'equilibrio ($v_1 = v_2 = 0$) il T. di B. contiene come caso particolare la legge di Stevino.

Inoltre si ha $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$

A parità di quota effettiva, ad un aumento della velocità corrisponde una diminuzione di pressione

---

Esempio: bidone aperto superiormente con $h = 80cm$



Determinare y^* per la massima gittata

Teorema di Bernoulli tra il punto 1 e il punto 2

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gy^*$$

p_1 = pressione atmosferica

La pressione dell'acqua quando esce dal foro è anche quella atmosferica e $v_1 << v_2$

$$gh = \frac{v_2^2}{2} + gy$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h-y^*)}$$

La vel. è solo funzione della altezza della acqua sopra il foro.

$h' = h - y^* \rightarrow v = \sqrt{2gh'}$ richiama la velocità di caduta di un grave da altezza h'. Legge di Torricelli

All'uscita traiettoria parabolica

il tempo di caduta è $t = \sqrt{2y^*/g}$

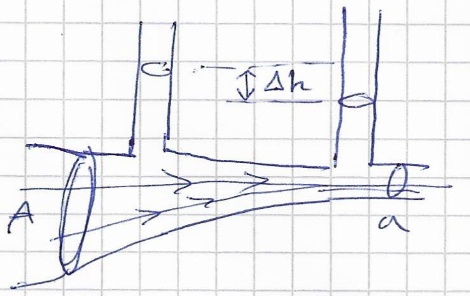
e ~~il~~ lungo l'asse x

$$S(y^*) = v_2 t = \sqrt{4(h-y^*)y^*}$$

$$\frac{dS(y^*)}{dy^*} = 0 \implies y^* = \frac{h}{2} = 40\,cm$$

Tubo di Venturi

strumento per misurare la velocità media dei fluidi in una condotta



$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$$

Per un fluido incompressibile

$$A v_A = a v_a$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{v_a^2}{g}$$

La vel. del fluido è maggiore nelle zone di sezione minore e quindi la pressione è minore

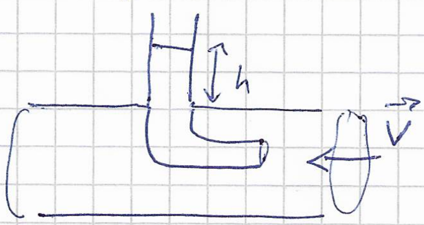
I due termini $\frac{p_A}{\rho g}$ e $\frac{p_a}{\rho g}$ rappresentano le altezze del fluido nelle due colonnine, la cui differenza può esser misurata

$$v_A^2 = 2g\,\frac{a^2}{A^2-a^2}\,(h_A-h_a)$$

$$K=\sqrt{2g\,\frac{a^2}{A^2-a^2}} \qquad \boxed{v_A = k\sqrt{h_A-h_a}}$$

<u>Tubo di Pitot</u>

Sempre per misurare la velocità - Pressione necessaria per arrestare il moto -



1732 vel. dell'acqua nella Senna

$$\frac{p_{est}}{\rho g}+\frac{1}{2}\frac{v_{est}^2}{g}=\frac{p_{int}}{\rho g}$$

[p_{int} è la pressione dentro il tubo in cui $v=0$]

$h = \frac{p_{int}}{\rho g} - \frac{p_{est}}{\rho g}$ è il dislivello, si ottiene

$$v_{est} = \sqrt{2gh}$$

<u>NB:</u> Bernoulli OK per liquidi incompressibili ma vale anche per i gas se la vel. del fluido è piccola rispetto a quella del suono -