

Gravitazione

Storicamente: moto dei pianeti (Newton)

Dalle proprietà di questi moti + principi della dinamica
si ottiene la legge di gravitazione

Oppure le leggi di Keplero si deducano da quelle di Newton
per la gravitazione.

Moto gravitazionali e inversi -

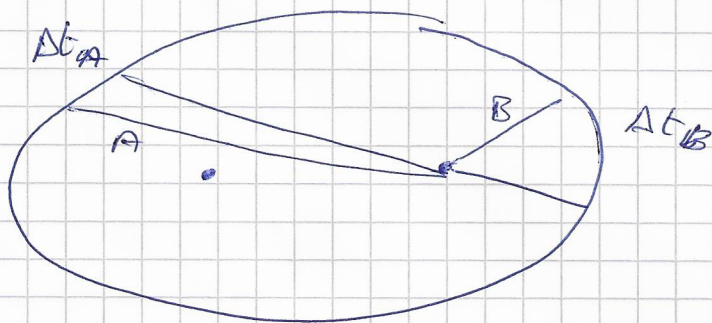
Calcoli di forza e momento spinta - conservazione del
momento angolare e dell'energia

Orbite - Misura di G - maree

Recentemente: onde gravitazionali

Forza gravitazionale: meno intensa ma solo attrattiva -

Sistemi solari: Copernico, Tycho Brahe, Keplero, Newton.
Mente



Aree spazzate $\Delta t_A = \Delta t_B$

I^a legge

Orbite sono ellissi e il
Sole è in uno dei due
fuochi

II^a legge: il raggio
spazza aree proporzionali

III^a Il quadrato dei periodi di rivoluzione dei pianeti
sono $\propto$ al cubo dei semiassemi maggiori

Prevedendo al tempo di Newton -

12/05/2016

Prima di Newton: leggi diverse per corpi celesti e corpi sulla terra - Newton la legge è la stessa ma le distanze sono molto diverse.

Luna: orbita $\approx$ circolare e molto uniforme (II^a legge)

$$v = \frac{2\pi R_{TL}}{T}$$

$$a = \frac{v^2}{R_{TL}} = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T^2}$$

Accel. di gravità sulla terra g ($R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$)
e accel. a della Luna

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, R_{TL} \approx 3.84 \times 10^8 \text{ m}, T = 2.36 \times 10^6 \text{ sec}$$

$$\frac{g}{a} = 3603 \text{ sembra } \left(\frac{R_{TL}}{R_T}\right)^2 \approx 3634$$

$$\Rightarrow g:a = \frac{1}{R_T^2} : \frac{1}{R_{TL}^2} \rightarrow a \propto \frac{1}{r^2}$$

NB: per due corpi spinti è come se tutti la massa fosse nel centro $\rightarrow$ calcolo superintenzuale. (Leibniz)

Poi con il II^o principio

$$f \propto \frac{m}{r^2} \quad f_{L(T)} \propto \frac{M_L}{R_{TL}^2}$$

$$\text{ma anche } f_{T(L)} \propto \frac{M_T}{R_{TL}^2}$$

Azione e reazione $f_{T(L)} = f_{L(T)}$

$$f_{T(L)} = f_{L(T)} \propto \frac{M_T M_L}{R_{TL}^2}$$

Newton: simmetria tra corpo che attrae e corpo che viene attratto

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [m_j \neq m_i]$$

Legge di gravitazione universale -

Vale per corpi puntiformi o sferici -

Costante di gravitazione

~~$$G = 6.67 \times 10^{-11}$$~~

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$$

Forme vettoriali

$$\vec{f}_{2(1)} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{f}_{1(2)}$$

Per corpi non puntiformi

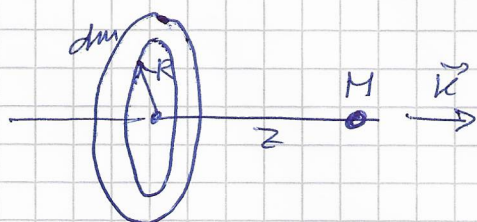
$$\vec{f}_{2(1)} \approx - \sum_{i,j} G \frac{\Delta m_{1,i} \Delta m_{2,j}}{r_{i,j}^3} (\vec{r}_{2,j} - \vec{r}_{1,i}) =$$

$$= - \int_{m_1} \int_{m_2} G \frac{dm_1 dm_2}{r^3} \vec{r}$$

Forza grav. tra due persone a $d = 1 \text{ m}$, 70 Kg

$$f \approx 3.3 \times 10^{-7} \text{ N}$$

1/4

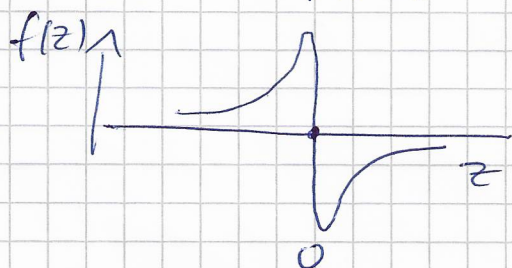


anello e massa puntiforme

$$dV = -G \frac{M dm}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$V = -G \frac{Mm}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$f_z = f(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -G M m \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}}$$



Forza massima per

$$z = \pm R/\sqrt{2}$$

$$\text{per } |z| \gg R \rightarrow f_z = -\frac{G m M}{z^2}$$

Massa inerziale e massa gravitazionale

$$F = ma$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\text{però } \vec{W} = m_y \vec{g}$$

Varie domande (?) riguardanti presunto / proprietà diversi materiali di diversa composizione

Relazione massa - gravitazione / Relativ. generale

Principio di equivalenza (debole)

$m_i \propto m_y$ con coefficiente G .

Newton: se $m_y \neq m_i$ l'eq. del pendolo sarebbe diversa

$$\vec{W} + \vec{R} = m_i \vec{a}$$

e nella direzione tangente

$$-m_y g \sin \theta = m_i \ddot{s} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i L}{m_y g}}$$

Materiali diversi oscillerebbero con periodi differenti

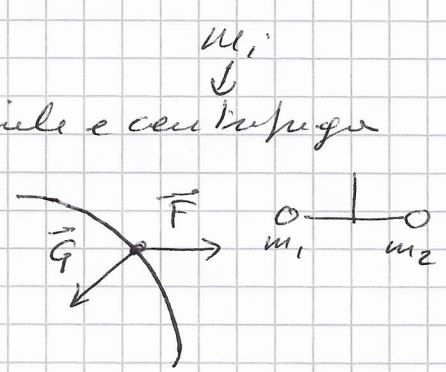
Newton misurò all' 1/1000

Eotvos 1909

Sulla Terra due forze: gravitazionale e centrifuga

Bilancia di torsione

$$R = \frac{\left(\frac{m_i}{m_y}\right)_1 - \left(\frac{m_i}{m_y}\right)_2}{\left(\frac{m_i}{m_y}\right)_1} < 3 \cdot 10^{-9}$$



Brumbery 1970

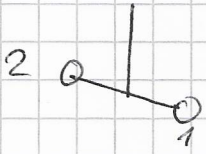
$$R < 3 \cdot 10^{-11}$$

Se $m_i \neq m_y$ (dipende dalla composizione) corpi diversi nella Terra orbiterebbero attorno al Sole con orbite diverse

Per orbite circolari

$$G \frac{M m_y}{r^2} = m_i \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{G M_S}{v^2} \left(\frac{m_y}{m_i} \right)$$



Questo procedimento si richiama di una
barretta appesa ad un filo. Osservazioni
opere 12 ore. Più o meno lontano dal Sole.

Rappresentazione (Eotvos)

Disturbi Terra Sole (Brugusky)

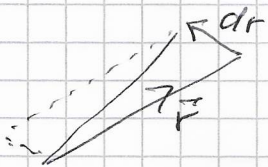
Legge di Newton e Legge di Keplero

I^a legge di Keplero: le orbite sono ellissi e il Sole
occupa uno dei due fuochi. (dopo)

II^a legge: la forza gravitazionale tra due corpi è diretta come il
vettore che li congiunge $\rightarrow$ conservazione momento angolare

Da cui la conservazione della vel. areolare $\vec{S}$
vettore che ha direzione $\perp$ al piano del moto, modulo
uguale alla velocità con cui il vettore $\vec{r}$ spazza il piano e
verso tale che il vettore $\vec{r}$ descrive un'area $\vec{r}$ autonomo

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad dA = \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}| dt}{2}$$



$$S = \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{2} = \frac{L}{2m} \quad \text{momento angolare}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

Velocità areolare $\leftrightarrow$ momento angolare - conservazione -

III^a legge $T^2 \propto R^3$ $\leftarrow$ semiasse maggiore dell'orbita ellittica

Consideriamo 2 corpi

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\mu} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Assumendo un'orbita circolare di raggio r

$$\text{accel centripeta} = \frac{v^2}{r} = \frac{f}{m} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = G \frac{m_1 + m_2}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{m_1 + m_2}{r^2}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad \text{ma } M_S \gg m_p$$

$$\frac{T^2}{r^3} \approx \frac{4\pi^2}{G M_S} \quad \text{da cui si può ricavare } M_S$$

Conoscendo la caratteristica del nostro G .

Terra $T = 1 \text{ anno} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$

$$r_{TS} = 1 \text{ UA} = 149.7 \times 10^6 \text{ km}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r^3}{T^2} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$T_S(\text{saturno}) = 29.45 \text{ anni}$$

$\approx$ orbite circolari

$$T_N(\text{Nettuno}) = 164.8 \text{ anni}$$

dedurre la distanza
dal Sole

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S} = \frac{T_S^2}{R_S^3}$$

$$R_S = R_T \left(\frac{T_S}{T_T} \right)^{2/3} = 9.54 \text{ UA}$$

$$R_N = 30.07 \text{ UA}$$

Dalla III^a legge di Keplero $\rightarrow$ legge di gravitazione

$$\frac{T^2}{r^3} = k \Rightarrow T^2 = k r^3 \quad (k \text{ costante})$$

ma per la II^a legge se r è costante lo è anche v

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{r T^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2}{k} \frac{1}{r^2} \Rightarrow f \propto \frac{1}{r^2}$$

Accelerazione gravitazionale

$$f = G \frac{m M_T}{R_T^2} = m g \Rightarrow g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Satelliti geostazionari - Telecom. fissi sulla verticale

$$\frac{T^2}{r^3} \approx \frac{4\pi^2}{G M_T} \quad M_T = \frac{g R_T^2}{g}$$

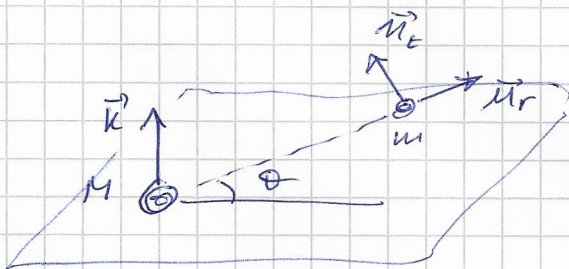
$$r = \left(\frac{g R_T^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42.100 \text{ km}$$

$$\rightarrow \Delta h = 35.800 \text{ km.}$$

Campo a simmetria sferica

Con generale: moto in un campo di forze centrali a simmetria sferica (anche campo elettrostatico)

Caso $M \gg m$ M centro di forza (coordinate polari)



Moto piano: conservazione
momento angolare
Costanti del moto

$$\vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v} = r \vec{u}_r \times m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) =$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$E_M = \frac{m v^2}{2} + V(r) = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{2} + V(r) =$$

$$= \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{p^2}{2 m r^2} + V(r) \quad (\text{indipendente da } \theta)$$

Energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{p^2}{2 m r^2}$$

Energia meccanica

$$E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

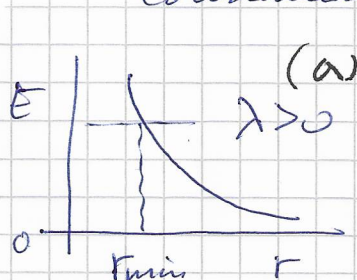
Analogia a quella di una particella vincolata a muoversi su una semiretta ($r \geq 0$) sotto l'azione di V_{eff} conservativa.

Analisi formale e incompleta - manca $\Theta(t)$

Conservazione dell'energia e sistemi ad un grado di libertà

Conoscenza $r(t)$ per cui calcolata $\Theta(t)$ dall'eq. di $\vec{p}$ e poi eliminando t si ha la traiettoria $r = r(\Theta)$.

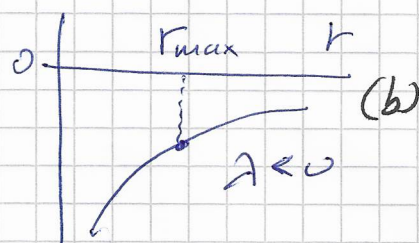
Conservazioni



(a) $V(r) = \frac{\lambda}{r}$

Se $\vec{p} = 0$ movimento puramente radiale

e $V_{eff}(r) = \frac{\lambda}{r}$



Con (a) $E_M > 0$ regione per $r \geq r_{min}$ non legato

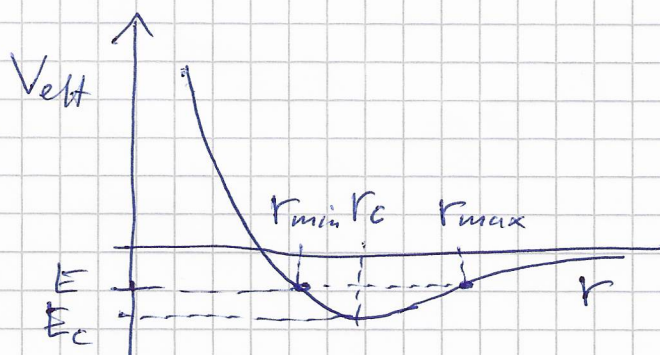
Con (b) $E_M \geq 0$

Se $E_M > 0$ il sistema può trovarsi a qualunque distanza

Se $E_M < 0$ il sistema è legato e le regioni accessibili sono

$0 \leq r \leq r_{max}$ e il corpo cadrà nel momento di forza - instabile -

Se $\vec{p} \neq 0$ il termine $V_c(r) = \frac{p^2}{2mr^2}$ può mantenere la stabilità del sistema



A piccoli r prevale $V_c(r)$ mentre a grandi r l'en. potenziale
Il numero ℓ_c dipende dal momento angolare.

$$E_c = V_{eff}(r_c)$$

- $E_M < E_c$ moto non possibile perché l'energia cinetica associata al moto radiale è > 0 .
- $E_M = E_c$ moto possibile solo per $r = r_c$ - orbite circolari
- $E_c < E_M < 0$ moto possibile per $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ stato legato con orbite limitate
- $E_M \geq 0$ Il sistema è libero ma $\exists$ una distanza minima al di sotto della quale non possono avvicinarsi

In tutti i casi curve coniche

per $E_c < E_M < 0 \rightarrow$ ellisse

per $E_c = E_M \rightarrow$ circonferenza

per $E_M = 0 \rightarrow$ parabola

per $E_M > 0 \rightarrow$ iperbole

Nel caso dove il moto è possibile $\exists$ una distanza minima: pericelio

Velocità di fuga della Terra

$$K_i + V_i = K_{\infty} + V_{\infty}$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - G \frac{mM}{R_T} = 0 \Rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11.2 \text{ km/s}$$

13/05/2016

Orbite circolari

$$\dot{r} = 0 ; p = mvr ; \vec{p} = \text{cost} ; v = \text{cost}$$

moto uniforme

$$E_M = V_{eff}(r) = -G \frac{mM}{r} + \frac{p^2}{2mr^2}$$

(229)

Il valore del raggio R corrispondente ad un dato $\vec{p}$ ha due radici di $V_{eff}(r)$

$$R = \frac{p^2}{GMm^2} \quad \checkmark \quad \frac{\partial E_M}{\partial R} = 0$$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{p^2}{2mr^2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{p^2}{2mr^2}$$

$$V(R) = -G \frac{mM}{R} = -2 \frac{p^2}{2mR^2} \quad \checkmark \quad (p = m v R)$$

il termine $\frac{p^2}{2mR^2} = \frac{1}{2} m v^2$ (en. cinetica)

quindi per le orbite circolari:

$$V = -2K \quad ; \quad K = -\frac{V}{2} = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R}$$

$$E_M = K + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2} = -K$$

e quindi:
$$E_M = -\frac{1}{2} G \frac{mM}{R}$$

Vel di fuga $V_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$

Per un'orbita circolare $K = -\frac{V}{2} \rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

Alla stessa distanza R dal centro della terra $v_f = \sqrt{2} v_{orb}$

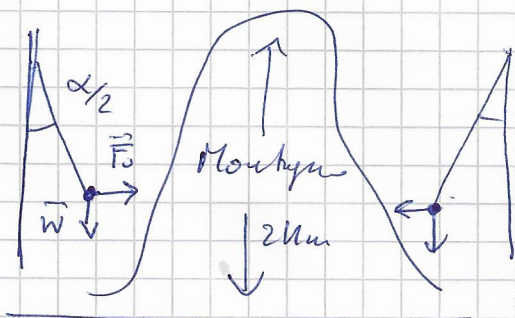
Per la fuga en meccanica hohle = 0

Per l'orbita en meccanica < 0

Costante gravitazionale G

1774 Maskelyne (Terra piena o cava?)

→ misura di $M_T \rightarrow G(g, M_T)$



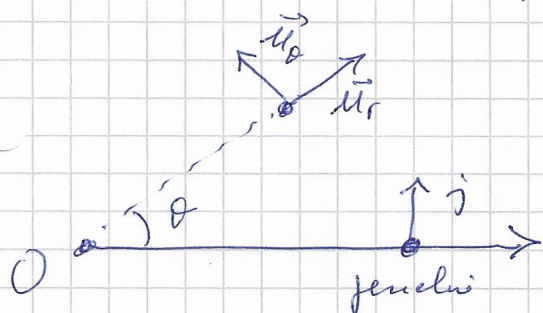
$$M_T = 6.8 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_T (\text{reale}) = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Prima legge di Keplero

Se $\vec{p} \neq 0 \exists$ rmi di avvicinamento per le orbite rispetto al centro di forza ($M \gg m$ Sole, pianeta) - in corrispondenza della quale, essendo nullo $\dot{r}$, la velocità è $\perp$ al vettore posizione.

Asse piano in quella direzione congiungente il centro di forza con il perielio



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{m M_s}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\alpha = G m M_s$$

$$\text{ricordando che } \vec{u}_r = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \frac{dt}{d\theta}$$

avremo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\alpha}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{\alpha m}{p} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m\vec{v} - \frac{\alpha m}{p} \vec{u}_\theta \right) = 0 \quad \text{quindi } \underline{\underline{\frac{p}{\alpha} \vec{v} - \vec{u}_\theta = \text{cost}}}}$$

Nella posizione del perielio

Integrale primo del moto

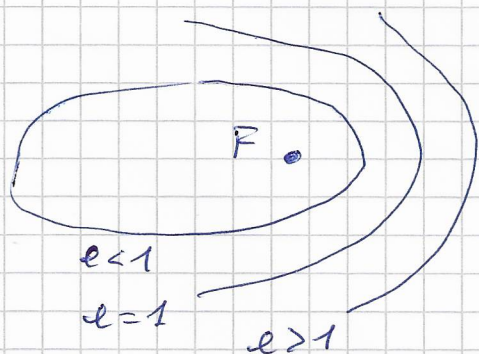
$$\frac{p}{\alpha} \vec{v} - \vec{u}_\theta = \text{costante caratteristica delle diverse traiettorie}$$

Moltiplicando scalarmemente per $\vec{u}_\theta$

$$\frac{p}{\alpha} r \dot{\theta} - 1 = e \cos \theta$$

$$\text{ma } \dot{\theta} = \frac{p}{m r^2}$$

$$\frac{p^2}{m \alpha r} = 1 + e \cos \theta$$



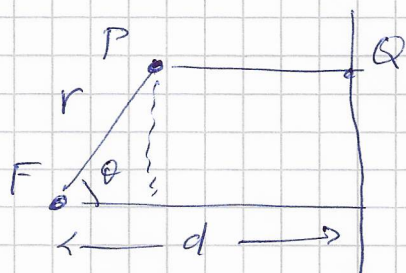
e, risolvendolo rispetto ad r

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{p^2} (1 + e \cos \theta)}$$

Il minimo valore si ha al perielio ($\theta = 0$) quindi:

$$1 + e \cos \theta \leq 1 + e \Rightarrow e \geq 0$$

Curve coniche: luogo dei punti del piano le cui distanze PF da F (fuoco) e PQ da una retta (direttrice), sono in un rapporto costante



r e θ coordinate polari di P

$$e = \frac{r}{d - r \cos \theta}$$

e quindi

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

ma r deve essere > 0 quindi $\cos \theta > -\frac{1}{e}$

~~es~~ : l'equazione è definita per tutti i valori $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $e < 1$

la curva è chiusa ed è un'ellisse

Circonfenza: caso particolare $e \rightarrow 0$, $d \rightarrow \infty$

in modo che $e \cdot d$ è costante

$e = 1$ parabola $\theta \cdot r \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow \pi$

$e > 1$ iperbole

29/05/2022

①

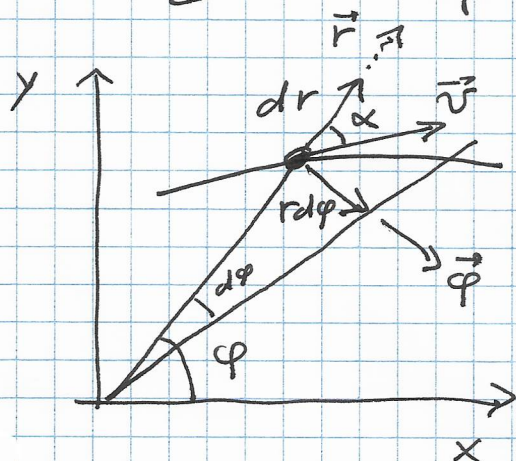
Leggi di ~~Ke~~ Keplero - dimenzioni - (Mercuriani) -

1. Forma ellittica con sole in uno dei fuochi.
2. Vel. areolare costante
3. $a^3/T^2 = \text{cost}$ (per tutti i fuochi)
 a = semiasse maggiore dell'orbita

* Traiettoria ellittica

Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E = \text{cost.}$$



In coordinate polari

$$\begin{cases} v_r = v \cos \alpha = \frac{dr}{dt} \\ v_\phi = v \sin \alpha = r \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = E + \frac{GMm}{r}$$

Momento angolare $\rightarrow |\vec{p}| = p = r m v \sin \alpha = r m \left(r \frac{d\phi}{dt} \right) \rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{p}{m r^2}}$

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{p^2}{m^2 r^2} \right] = E + \frac{GMm}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{p^2}{m^2 r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}$$

(2)

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{p^2}{m^2 r^2}}$$

Eq. di 1° ordine (separazione delle variabili) per ottenere $r(t) \rightarrow \varphi(t)$.

Ma se ci interessa solo la traiettoria: relazione $\varphi \rightarrow r$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\dots}}$$

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$$a = -\frac{GMm}{2E} ; b^2 = -\frac{p^2}{2Em} ; b = \sqrt{\frac{-p^2}{2Em}}$$

$\rightarrow [L]$ (realtà ≥ 0) $\rightarrow b \sim [L]$ mentre $E < 0$ stati legati.

Integriamo membro a membro

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$[\varphi_0 = 0 \text{ scelto arbitr.}]$

$$\cos \varphi = \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$r(a + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos \varphi) = b^2$$

che è l'eq. di una ellisse con uno fuoco a e uno fuoco b.