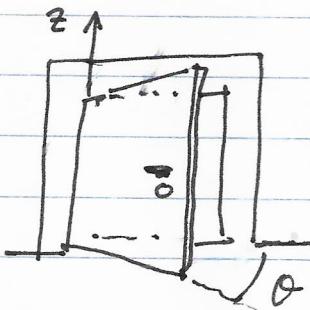


Sistemi rigidi con ane fuso



Da 6 a 1 grado di libertà.

$$\text{II}^{\text{a}} \text{ eq. centrale } \vec{M}^{(\text{eq})} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Proiezione sull'asse fuso z.

$$\text{Il momento anale } P_z = \vec{P} \cdot \vec{k} = (I\vec{\omega} + \vec{P}_L) \cdot \vec{k} = I\omega$$

$$M_z^{(\text{eq})} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{d}{dt} (\vec{P} \cdot \vec{k}) = \frac{d}{dt} (I\omega)$$

NB: in queste derivazioni è importante che l'ane di rotazione sia fuso.

Nei sistemi rigidi rettificati ogni punto manterrà la stessa distanza g_i dall'ane.

Quindi I non dipende dal tempo.

$$M_z^{(\text{eq})} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\omega = \frac{d\theta}{dt})$$

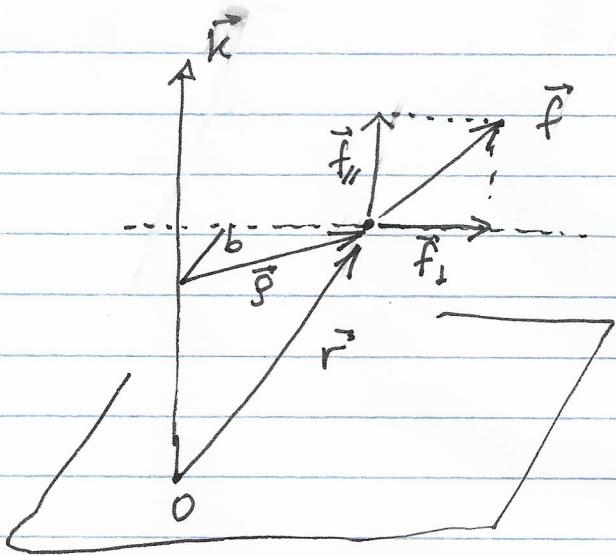
Il momento polare delle forze esterne $M_z^{(\text{eq})}$ si può ottenere proiettando sull'asse di rotazione il momento polare delle forze esterne rivolto ad un polo sull'ane.

Se il momento polare è I all'ane $\rightarrow 0$.

Nel caso di una sola forza $M_z^{(\text{eq})} = 0$ se la forza è // all'ane oppure la retta di azione della forza ricorda l'asse.

Dalla eq. precedente \rightarrow eq. oraria $\dot{\theta} = \Theta(t)$

- * Contributo di una forza \vec{f} applicata ad un corpo σ al momento anale - Prodotto del modulo di \vec{f}_\perp ($\perp \vec{k}$) per il braccio rivolto all'ane



Data una forza \vec{f} esaminiamo il momento M_z .

Scomponiamo \vec{f} in \vec{f}_{\perp} e \vec{f}_{\parallel} rispetto all'asse \vec{k}

$$M_z = (\vec{r} \times \vec{f}) \cdot \vec{k} = (\vec{r} \times \vec{f}_{\parallel}) \cdot \vec{k} + (\vec{r} \times \vec{f}_{\perp}) \cdot \vec{k}$$

in quanto $(\vec{r} \times \vec{f}_{\parallel}) \perp \vec{f}_{\parallel}$ e quindi a \vec{k}

Esprimiamo \vec{r} in termini delle sue componenti $\parallel \vec{k}$ (\parallel ase) e $\perp \vec{k}$ (\perp ase)

$$\begin{aligned} M_z &= (\vec{r} \times \vec{f}_{\perp}) \cdot \vec{k} = [(z\vec{k} + \vec{g}) \times \vec{f}_{\perp}] \cdot \vec{k} = \\ &= (\vec{g} \times \vec{f}_{\perp}) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$\vec{f}_{\perp} + \vec{g}$ sono \perp a \vec{k} quindi il modulo di M_z è dato

dai $b f_{\perp}$ in cui b è la distanza dell'asse
della linea di azione di \vec{f}_{\perp} , cioè il braccio di
tale vettore rispetto all'asse.

Se $\vec{f}_{\perp} \neq \vec{g}$ non \parallel $\rightarrow M_z = 0$

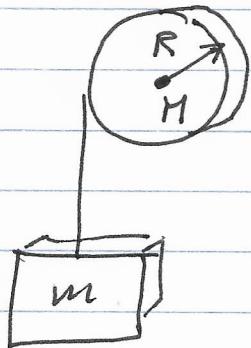
Il segno è positivo per rotazione antioraria.

Onde positivo se $\vec{g} \times \vec{f}_{\perp}$ ha il verso di \vec{k}

Da cui la regola pratica enunciata all'inizio.

Visualizzazione: asci rettilineo lungo \vec{g} che può ruotare intorno all'asse \vec{k} sotto effetto della forza \vec{f}_{\perp} .

Esempio: Cerniere di massa M sotto l'effetto di un fuso di massa m



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Sul corpo m agiscono due forze: il fuso e l'attrito della corda di modulo uguale alla tensione T

R: Lungo l'asse verticale si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} mg - T = ma \\ RT = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \end{array} \right. \quad \bar{M}^{(e)} = RT$$

$$T = mg - ma = mg - mR\alpha$$

$$RT = Rmg - mR^2\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$2mg - 2mR\alpha = MR\alpha \quad \alpha(MR + 2mR) = 2mg$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2mg}{MR + 2mR} = \frac{g}{R} \frac{1}{(\frac{M}{2m} + 1)} = \frac{g}{R} \left(1 + \frac{M}{2m}\right)^{-1} \\ T = mg \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^{-1} \end{array} \right.$$

L'acc. angolare della cerniere e quella lineare del corpo sono costanti

NB: Nel caso di aere fermo le reazioni vincolari mantengono il sistema ancorato all'aere

Assi di rotazione e assi di simmetria

Per il secondo teorema del C.d.m. $\vec{F}^{(e)} = M\vec{\alpha}_c$

Se il C.d.m. si trova fuori dell'asse di rotazione, si muove su una traiettoria circolare e quindi dovrà avere una componente centripeta dovuta ai vincoli.

Se si vogliono discutere le reazioni vincolari è opportuno che al C.d.m. si trovi sull'asse di rotazione.

Dalla II^a eq. conserviale

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{P}_\perp}{dt}$$

Anche il vettore \vec{P} resta ~~attorno~~ attorno al sistema

Il momento I all'asse è dato da

$$\vec{P}_\perp = - \sum_i m_i z_i \omega \vec{q}_i \quad (\text{se } \vec{r} \text{ non varia con } t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_\perp}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(-\omega \sum_i m_i z_i \vec{q}_i \right) = \frac{d\omega}{dt} \frac{\vec{P}_\perp}{\omega} + \left(-\omega \sum_i m_i z_i \vec{\omega} \times \vec{q}_i \right) = \\ &= \frac{d\omega}{dt} \frac{\vec{P}_\perp}{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{P}_\perp \end{aligned}$$

Questi contributo è fornito dalle reazioni vincolari e incide sulle traslazioni - Va innanzitutto per rotazione unica e attorno - Vibrazioni e stremi sull'asse
Si cerca quindi di far ruotare il sistema attorno ad un asse di simmetria.

Equilibratura delle gomme - per rendere il movimento parallelo possibile all'asse di rotazione

$$\text{Se } \vec{F}^{(e)} \text{ ed } M^{(e)} = 0 \rightarrow \vec{P}_\perp = 0$$

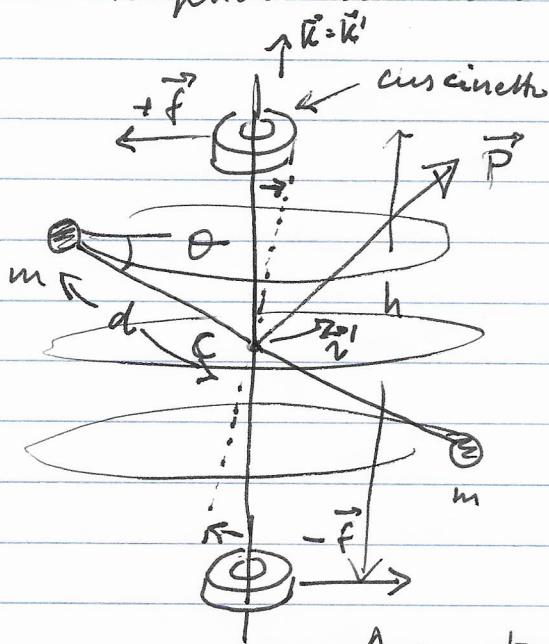
Se viene messo in rotazione rispetto ad un proprio asse di simmetri ($\vec{P}_\perp = 0$) mantiene il moto costante nel tempo

Gli assi di simmetria vengono detti assi liberi o assenti di rotazione.

Per questo tipo di moto non è necessaria l'azione di vucolo.

Anche per frenare va applicato un momento $\vec{\tau} \times \vec{\omega}$
Se non volete i ruoli-

Consideriamo l'esempio studiato precedentemente
rispetto al ruolo dei ruoli-



Abbiamo già calcolato

$$\vec{P}_\perp = 2mw^2d^2 \sin\theta \cos\theta \vec{z}'$$

Il corrispondente momento della
forza è $\vec{\tau}$ all'asse di rotazione
ed è $(\vec{\omega} \times \vec{P}_\perp)$ è \perp all'asse di rot.
e ha intensità
 $2mw^2d^2 \sin\theta \cos\theta$

A questo momento deve corrispondere un
analogo momento delle reazioni ruolari

Per la forza nei cuscinetti dobbiamo dividere per h.

Questo non nullo se l'asta è \perp all'asse di rot.

Ritirando della saldatura \rightarrow l'asta è libera del vucolo.

$$M^{(es)} = 0 \quad (\text{vucolo su } C) \text{ e } \text{no c'è } \vec{P}$$

Il sistema non mette quindi in rotazione rispetto al proprio
asse di simmetria con vel ang. w' tale che

$$2m d^2 w' = 2md^2 w \sin\theta \Rightarrow w' = w \sin\theta$$

$$[\underline{\text{NB: }} P = 2mw^2d^2 \sin\theta]$$

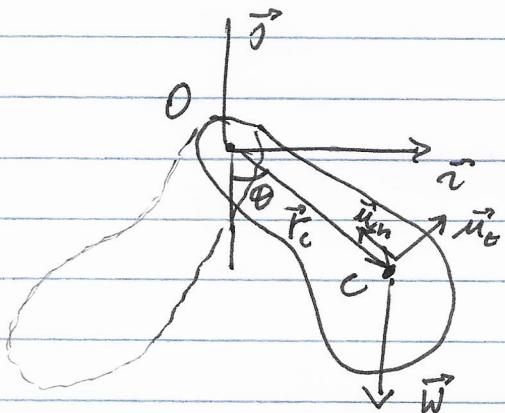
momento angolare totale
proiettato su C

$$\left[\begin{array}{l} |\vec{P}| = P = 2mw^2d^2 \text{ rispetto a } C \\ \text{e } w = wd \sin\theta \end{array} \right]$$

Pendolo finco

Sistema finco vincolato a ruotare

per un'asse diverso del C.d.m
e variabile



Forze agenti:

forza delle particelle e reazioni vincolari

Zero attrito \rightarrow il momento delle

reazioni vincolari rispetto all'asse finco è zero perché
le forze passano per l'asse stesso.

Z è equivalente con l'asse di rotazione

$$M_z^{(c)} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \right) \cdot \vec{k} = (\vec{r}_c \times M \vec{g}) \cdot \vec{k}$$

Proiezione sull'asse z di tutte le forze peso (momento)
che vale $\vec{P}_c \times M \vec{g}$ (veli, bancone etc.)

Il momento della forza peso ha la direzione dell'asse
di rot. k̂ e il suo modulo è dato dalla forza $M \vec{g}$
per il braccio $b = d \sin \theta$ ($d = \vec{r}_c$)

$$- Mg d \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

per grande oscillazione $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mg d \theta}{I} = 0$$

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg d}{I}}$$

Pendolo finco composto

Si ottiene il pendolo classico per $I = Md^2$

tenendo d costante il periodo $T = 2\pi/\omega_0$

Reazioni nucleare

$$\text{Teorema del C.d.u. } m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{R}$$

al c.d.u. si muove con legge oraria

$$S(t) = D_{\max} d \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

rappresentazione matematica

$$\vec{a}_c = \ddot{S} \vec{u}_t + \frac{\dot{S}^2}{d} \vec{u}_n = -D_{\max} d \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \vec{u}_t + \\ + D_{\max} d \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \vec{u}_n$$

e quindi

$$\vec{R} = -m\vec{g} - m D_{\max} d \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \vec{u}_t + m D_{\max}^2 d \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \vec{u}_n$$

$$R_x = -m D_{\max} d \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos \underbrace{[D_{\max} \omega_0 t + \varphi_0]}_{S(t)/d} + \\ - m D_{\max}^2 d \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \sin [D_{\max} \omega_0 t + \varphi_0]$$

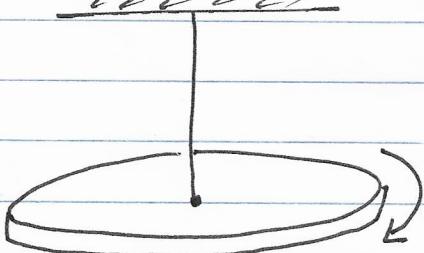
$$R_y = +m\vec{g} - m D_{\max} d \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \sin \underbrace{[D_{\max} \omega_0 t + \varphi_0]}_{S(t)/d} + \\ + m D_{\max}^2 d \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \cos [D_{\max} \omega_0 t + \varphi_0]$$

Pendolo di torsione

Sistema con cane fijo

Elasticità: il momento di torsione
è \propto all'angolo - Legge di Hooke.

Relazione lineare tra sforzo e deformazione



$$M_z = -k\theta$$

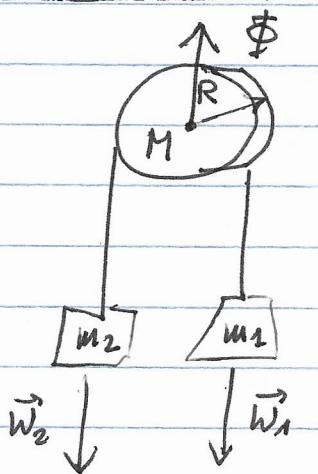
La gruola in questo caso non ha un ruolo
Il momento delle forze di torsione è 0 sul filo

$$M_2 = -k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$$

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

NB: se si conosce k si può determinare I.

04/05/2026



Macchina di Atwood

$M_2 > M_1$ l'andamento rotazionale è dritto verso da destra.

$$M_2^{(e)} = M_2 g R - M_1 g R$$

$$P_E = M_1 v_1 R + M_2 v_2 R + I \omega$$

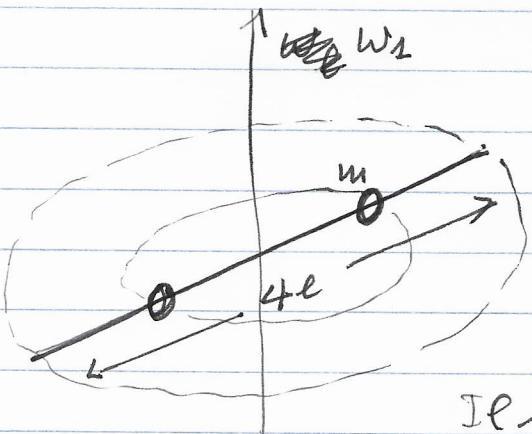
$$v_1 = v_2 = RW \quad I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$M_2^{(e)} = \frac{dP_E}{dt} = (M_2 - M_1) g R = \left(M_1 + M_2 + \frac{M}{2}\right) Ra$$

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2 + \frac{M}{2}} g$$

Conservazione del momento angolare ammire

Se il momento angolare delle forze esterne è nullo
il momento angolare ammire si conserva

Esempio

Asta con anelli liberi di scorrere.
inizialmente a destra della asta
e legati con un filo.

Se il filo viene tagliato qual'è
la vel. angolare dell'asta appena
prima che gli anelli cadano?

Il momento angolare delle forze esterne è 0
quindi il momento angolare si conserva -
A destra da per gli anelli abbiano

$$P_z = Iw \quad \text{momento angolare dell'asta}$$

$$P_z^{(0)} = 2ml^2\omega_1 \quad \text{anelli}$$

$$Iw_1 + 2ml^2\omega_1 = Iw_2 + 2ml(2l)^2\omega_2$$

$$w_2 = \frac{I_1}{I_2} w_1 = \frac{2ml^2 + \frac{4}{3}Ml^2}{8ml^2 + \frac{4}{3}Ml^2} \quad (M = \text{asta})$$

$$\text{Se } M \approx 0 \rightarrow w_2 = \frac{1}{4}w_1$$

Si potrebbe anche scrivere la conservazione del momento
angolare

$$\begin{aligned} I_1 w_1 &= I_2 w_2 \\ [I_1 = \text{momento di iniziativa} \quad \text{nella posizione iniziale}] \quad &\left\{ \begin{array}{l} I_1 = 2(ml^2) + \frac{1}{12}M(4l)^2 \\ I_2 = 2[m(2l)^2] + \frac{1}{12}M(4l)^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cioè come se il sistema fosse risolto ad ogni istante
le due asta e anelli hanno la stessa vel. angolare -

Tutt'altro

forzante reazionaria est esterna

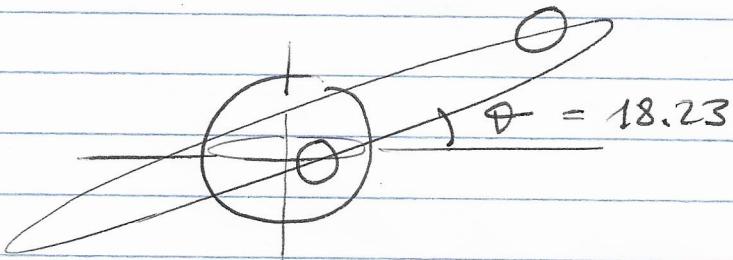
$$I_1 w_1 = I_2 w_2$$

Persone nel ghiaccio che si muovono

Ritirando il braccio il resto del corpo resiste
in uno opposto

Pattinatore che ruota

più cambia la vel. angolare
allargando e stringendo le braccia

Terra e Luna

Le forze dorate alla Luna
hanno un momento armato
transmissibili grandi

IW si conserva

Ma la Luna provoca le maree che modifichino il
movimento di rotazione

Quando la Luna si trova sopra l'equatore il m.d.i.
della Terra è max - e la vel. angolare è minima -

Energia Cinetica di un Sistema Rigido

Abbriemo visto che per un sistema di punti

$$K = K' + \frac{1}{2} M v_c^2$$

K' è en. cin. rispetto ad S' (c.d.m.) e am. parallela.

Se il sistema è rigido $\rightarrow \vec{v}_c; \vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega}(\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)) \quad = 0$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\{ v_c^2 + 2[\vec{v}_c - [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c)]]^2 \right\} +$$

$$+ [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c)]^2 \}$$

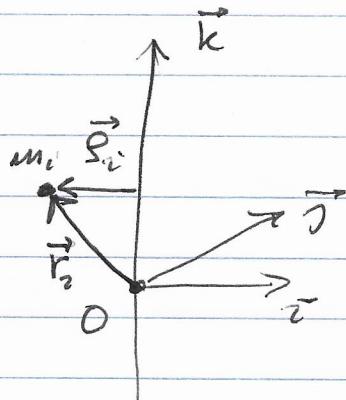
$$\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0 \quad \text{per la def del c.d.m.}$$

e l'ultima termine

$$[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c)]^2 = (w_{xi})^2$$

per cui

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w^2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Espressione} \\ \text{generale per} \\ \text{un sistema} \\ \text{rigido} \end{array} \right]$$



I_c = m.c.m. rispetto all'asse che passa per il c.d.m.
e $\parallel \vec{\omega}$

NB: $\vec{\omega}$ può anche ruotare att.

Nel caso di sola traslazione con una anche non
fermente per c.d.m.

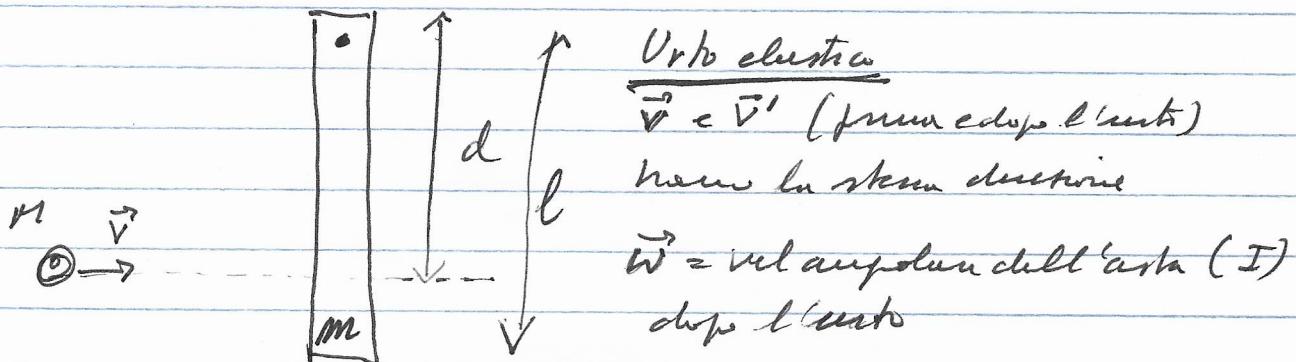
$$K = \frac{1}{2} M v_c^2$$

Nel caso di sola rotazione con una anche non
fermente per c.d.m.

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_i m_i s_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

s_i è distanza dall'asse di rotazione e I il momento di inerzia rispetto a questo ass.



Durante l'urto il veicolo esercita una forza impulsiva

Il momento armato delle forze esterne è nullo - conservazione del momento armato della q.d.m.

$$Mvd = Mv'd + Iw$$

Da cinetica

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 + \frac{1}{2} I w^2 \quad (I = \frac{1}{3} m l^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v - v' = \frac{1}{3} \frac{m}{M} \frac{l^2}{d} w \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 - v'^2 = \frac{1}{3} \frac{m}{M} l^2 w^2 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} (v + v') \underbrace{(v - v')}_{= \frac{1}{3} \frac{m}{M} \frac{l^2}{d} w} = \frac{1}{3} \frac{m}{M} l^2 w^2 \\ \frac{1}{3} \frac{m}{M} \frac{l^2}{d} w \end{array} \right]$$

da cui $v + v' = wd$

$$v + v' = wd$$

$$\omega = \frac{2\omega}{d + \frac{1}{3} \frac{m}{M} \frac{l^2}{d}} ; \quad \omega' = \frac{\omega}{2} \left(d - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \frac{l^2}{d} \right)$$

Se $\omega' < 0$ la sferetta rimbalza all'indietro.

L'angolo della reazione vincolare ne avanza la variazione dell'q.d.m. della sferetta e dell'asta

asta q.d.m. $M \cdot \omega'$ dopo l'asta

↳ di modulo $M \frac{l}{2} \omega$ (velocità del c.d.m.)

Le parti radiali è

$$Q_2 - Q_1 = m \frac{l}{2} \omega + M(\omega' - \omega) = m \frac{l}{2} \omega - \frac{1}{3} \frac{m l^2}{d} \omega$$

$$\text{per } d = \frac{2}{3} l \quad Q_2 - Q_1 = 0$$

Condizioni per cui la reazione vincolare dell'asta sull'asta è 0.

Centri di percussione:

I tre modelli forze agenti sui sistemi rigidi

Sistemi rigidi: leva forze esterne = 0

$$\text{nel caso di rotazione} \quad \delta L = M_2^{(e)} d\theta$$

Vediamo

$$\delta L = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i$$

Ogni R.F. si muove nell'asse di rot. (z)

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = (\omega \vec{k} \times \vec{r}_i) dt$$

$$\delta L = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \cdot (\omega \vec{k} \times \vec{r}_i) dt$$

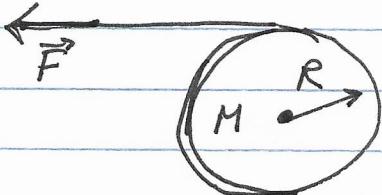
e poniamo i vettori ciclicamente

$$[\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}]$$

$$\delta L = \vec{L} \cdot \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(e)} \right) dt$$

$\vec{M}_2^{(e)}$ = momenti delle forze rigide
al polo ω^2

dove cur. $\delta L = M_2^{(e)} d\theta$



w_n = vel angolare dopo n giri

Teorema delle forze nere

Il lavoro elementare è dato da $M_2^{(e)} = RF$

[Lavoro = variazione dell'energia cinetica]

Integrando su n sostituiamo nel tra

$$L = 2n\pi RF = \frac{1}{2} I w_n^2 = \frac{1}{4} MR^2 w_n^2$$

$$w_n = \sqrt{\frac{8n\pi F}{MR}}$$

δ NB: se il momento delle forze è L all'asse di rot.

le forze non causano lavoro sul sistema rotante -

L'unica componente che esegue lavoro è quella \parallel all'asse di rot.

Analogia con le forze che fanno lavoro solo se spostano il punto di applicazione

* Espressione generale del lavoro elementare delle forze agenti su un corpo rigido

$$\delta L = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} \left[\vec{v}_c dt + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c) dt \right] =$$

$$= \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \left(\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times \vec{f}_i^{(e)} \right) \cdot \vec{\omega} dt$$

$$= \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \vec{M}_c^{(e)} \cdot \vec{\omega} dt$$

↑
variazione en
ergetica K_c

↑
rotazione

Analogia tra grandezze lineari ed angolari

Lineari

Ascrivere al moto S

$$\text{Velocità } v_s = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{Accel. tangenziale } a_s = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\text{Spostamento elementare } ds = v_s dt$$

Massa m

$$\text{Eq. del moto } f_s = m \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{En. cinetica } K = \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$\text{Q. d.m. } \vec{q} = m \vec{v}$$

$$\text{Lavoro elementare } \delta L = f_s ds$$

$$\text{Potenza } W = f_s v_s$$

Angolari

Ascrivere all'angolo θ

$$\text{Vel. angolare } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Accel. angol. } \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

~~$$\text{Rotata elem. } \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} dt = \omega dt$$~~

Momento angolare I

$$\text{Eq. angola } M_z^{eq} = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{En. cinetica } K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{Momento angol. } P_z = I \omega$$

$$\delta L = M_z^{eq} d\theta$$

$$W = M_z^{eq} \omega$$

Energia e moto dei sistemi rigidi

Se F^{ext} conservative \rightarrow en. meccanica si conserva.

Caso semplice - un solo grado di libertà

Motivo dell'energia x, \dot{x}

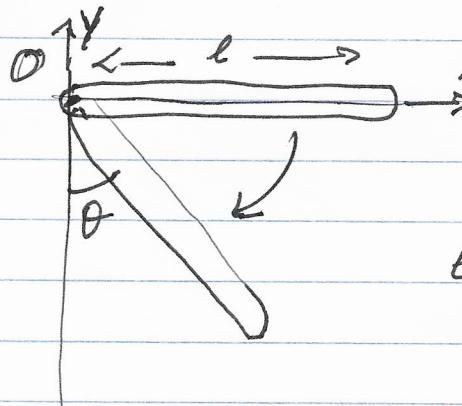
L'en meccanica è espressa da $E_H(x, \dot{x})$ che è costante nel t.

$$\frac{dE_H(x, \dot{x})}{dt} = 0 \rightarrow \text{eq. per } x(t)$$

(alternativa alle eq. cardinale)

Tre possibili tipi di moto di un sistema rigido

- Rotazione
- Combinata Roto-traslazione
- Rotolamento



m, θ (angolo)

$$y_c = -\frac{l}{2} \cos \theta$$

Eur.pt. gravitaz.

$$T = mg y_c = -mg \left(\frac{l}{2}\right) \cos \theta$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{n} ; K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \left(\frac{l}{2}\right) m l^2 \omega^2$$

$$E_H = \frac{ml^2}{6} \omega^2 - mg \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{ml^2}{6} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

è costante e ~~è~~ uguale allo comp. iniziale ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

Per ($\theta = 0$) verticale $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

Semplificando

$$\frac{l}{3} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g \cos \theta = 0$$

e dividendo per $\cos \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0$$

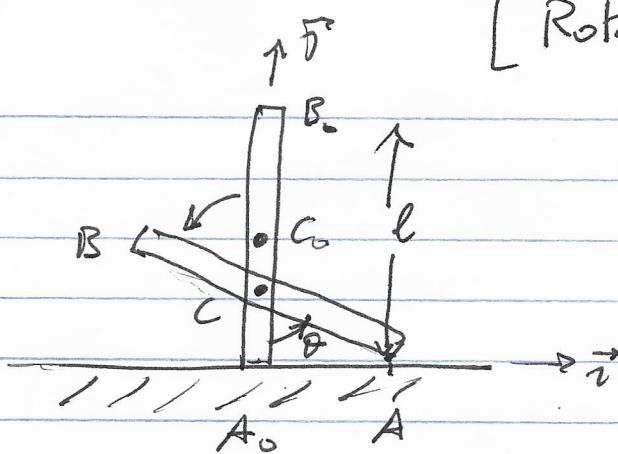
soltuzione min $\dot{\theta} = 0$

ma quando $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0$

Rototraslazione = rotazione attorno ad un asse reversibile fermato da un punto opportuno (centro di estensione rotante)

05/05/2016

[Rotazione e traslazione]



Barricano che curva.

Il moto del c.d.m. è dato dalle forze esterne che sono tutte verticali (no attrito)
→ accel. di C c'è anche verticale

$$\text{c.d.m. } Y = \frac{\ell}{2} \cos \theta$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_c &= \frac{dy}{dt} \vec{u} = -\frac{\ell}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{u} = -\frac{\ell}{2} \omega(t) \sin \theta(t) \vec{u} = \\ &= -\omega \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - y^2} \vec{u} \left[\frac{\ell}{2} \sin \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \frac{\ell^2}{4} \right] \\ &\quad \cancel{\ell^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ell^2}{4} - y^2 \right)^{3/2}} \cancel{\sin^2 \theta \left(\frac{\ell^2}{4} \right)^2} \\ &y = \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad \cos^2 \theta = y^2 \frac{4}{\ell^2} \\ &\sin \theta = \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - y^2} \end{aligned}$$

Sistema ad un solo grado di libertà in cui l'energia meccanica è costante (forze conservative)

$$\text{Inizialmente } E_H = m g \left(\frac{\ell}{2}\right)$$

e in genere

$$E_H = K + V = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m g \frac{\ell}{2} \cos \theta = m g \frac{\ell}{2}$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2 \text{ e il } \underline{\text{m.d.i. attorno all'asse di simmetria}}$$

ortthonormali perpendicolari per c.d.m.

$$v_c^2 = \omega^2 \left(\frac{\ell^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \underbrace{\frac{v_c^2}{\left(\frac{\ell^2}{4} - y^2\right)}}_{I} + m g \frac{\ell}{2} \cos \theta = m g \frac{\ell}{2} \underbrace{\frac{2}{\ell} y}_{\omega^2}$$

$$V_c^2 + \frac{1}{12} \frac{\ell^2 V_c^2}{\left(\frac{\ell^2}{4} - y^2\right)} = 2g \frac{\ell}{2} - 2gy$$

$$V_c^2 \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\ell^2}{\left(\frac{\ell^2}{4} - y^2\right)} \right) = g (\ell - 2y)$$

$$V_c^2 = g(\ell - 2y) \frac{\left(\frac{\ell^2}{4} - y^2\right)}{\left(\frac{\ell^2}{3} - y^2\right)}$$

Quando la pista è orizzontale ($y = 0$) $\rightarrow V_c = \frac{\sqrt{3}\ell g}{2}$

$(V_c^2 = \dot{y}^2)$ derivando rispetto a y si ottiene
l'eq. differenziale per $y(t)$

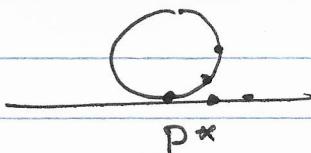
Condizioni iniziali $y(0) = \frac{\ell}{2}$, $\dot{y}(0) = 0$

Motore rotante attorno a \vec{V}_c e $\vec{\omega}$

Centro rotante di rotazione (t)

Rotazione

su una superficie piana



Attito dinamico: slittamento

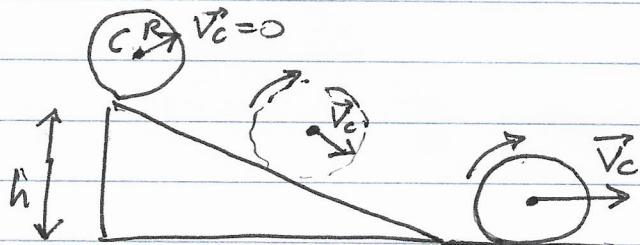
Attito veloce: deformazione parallela

Nel caso di corpi perfettamente rigidi si ha il rotolamento pur

$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r}^*)$$

dove r^* indossa, ad un dato istante,
il punto P^* di contatto con la superficie
rispetto alla quale P^* è fermo -

Quando la forza di attrito (ravente) statico non consente
l'urto per cui l'energia meccanica totale si conserva
fino scatto



Esempio: attrito non consente
l'urto e quindi l'energia meccanica
si conserva

$$\Delta V = -mgh ; \Delta K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

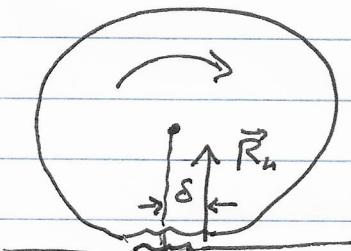
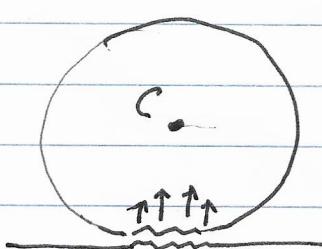
$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = mgh = 0 \quad I_c = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v_c = \omega R$$

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Nel piano inclinato bisico n'arrabbi un punto
slittamento ($\omega=0$) e $v_c = \sqrt{2gh} > \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

Attrito solvente - non realistico



Se si mantiene il
movimento della
forza tra superficie e
ruota è $\neq 0$

Se la ruota è in moto

$$M_V = R_n \delta$$

δ dipende dal materiale (metri)

Legno-legno 5×10^{-4}

Acciaio-acciaio 1.5×10^{-5}

$$\delta L_V = -M_V d\theta \text{ etc.}$$

Statica dei sistemi rigidi

Le eq. della statica si ottengono da quelle della dinamica.
Sistema rigido in equilibrio \rightarrow tutte le velocità = 0.

$$\vec{Q} = 0 \quad \vec{P} = 0 \quad \text{ma anche}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{res}} = 0 & \text{6 eq. scalari} \\ M_{\text{ext}}^{\text{res}} = 0 & (+\text{reazioni vincolari}) \end{cases}$$

Inoltre il sistema deve essere inizialmente in quiete

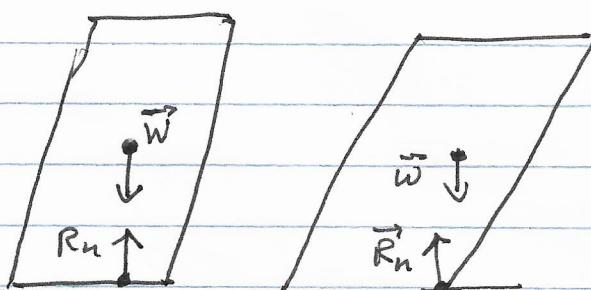
\rightarrow Equazioni fondamentali della statica dei sistemi rigidi

Se il ret risultante delle forze è nullo il momento non dipende dal polo.

Quindi nella statica è possibile scegliere qualunque polo per il calcolo del momento delle forze.

In genere si sceglie un polo che permette di cumulare il contributo di una reazione.

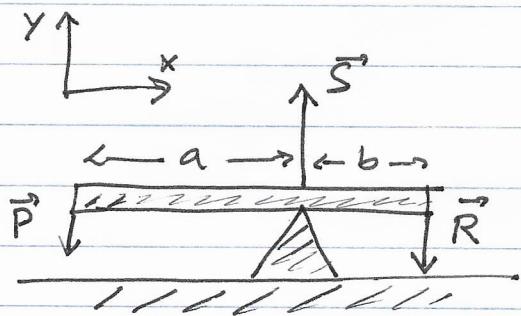
Torre appoggiata : peso + reazioni



$$M=0 \quad M \neq 0$$

L'errore se la verticale del c.d.m. non è compresa nella base di appoggio

Lema del piano genue



\vec{S} = reazione del fulcro

$$S_x = 0 \quad S_z = 0$$

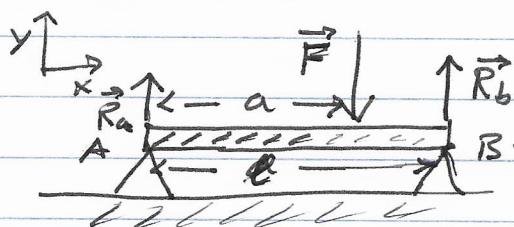
$$S_y - P - R = 0$$

$$S = P + R \quad \sum F = 0$$

$$\sum M = 0 \rightarrow Pa - Rb = 0$$

N.B.: Il momento polare di P ha il verso di z (fuori dal foglio)
mentre quello di R è opposto

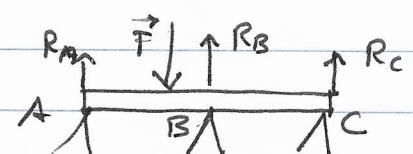
Due appogg



$R_A = R_B$ verticali (no attrito)

$$\begin{cases} F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_A + R_B - F = 0 \\ lR_B - aF = 0 \end{cases}$$

Se ci ha attrito giocano un ruolo anche le forze su x -



Tre appogg

Il problema è insolubile con le sole eq.

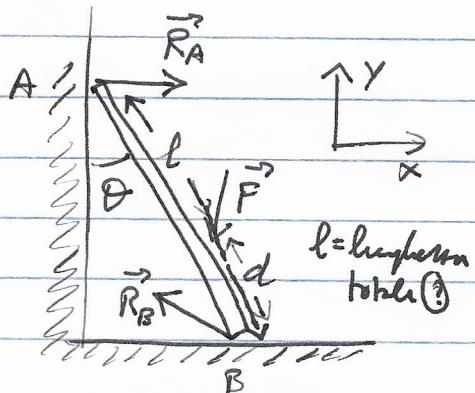
delle statica

Analogie alle gomme (4) di una scaletta

Sono importanti le relazioni tra forze e deformazioni

Vita media a 3 gomme non funziona -

Equilibrio di una scula



$$F_x^{(e)} = 0; F_y^{(e)} = 0, M_2^{(e)} = 0$$

Se consideriamo l'attacco sul pernante e sul muro avremo 4 incognite scalare dovute a \vec{R}_A e \vec{R}_B e solo 3 equazioni.

Assumeremo quindi l'attacco solo sul pernante e non sulla parete.

Polo B per annullare il momento di R_B la cui direzione non è nota.

$$\begin{aligned} R_A + R_{Bx} &= 0 && \text{Forze totali lungo } x \\ -F + R_{By} &= 0 && \text{Forze totali lungo } y \\ -l R_A \cos \theta + d F \sin \theta &= 0 && [\text{Momenti rispettativi polo B}] \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{Fd}{l} \tan \theta \\ R_{Bx} &= -R_A = -\frac{Fd}{l} \tan \theta \\ R_{By} &= F \end{aligned}$$

Per le leggi dell'attacco statico

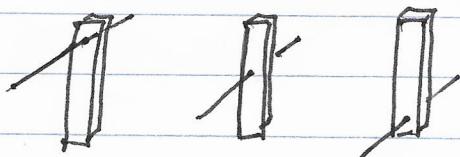
$$-R_{Bx} = \frac{Fd}{l} \tan \theta \leq \mu_s F$$

che cura la condizione di equilibrio ($d \neq 0$)

$$\tan \theta \leq \mu_s \frac{F}{d}$$

Il pernato è maggiore se si sta più in alto.

Stabilità dell'equilibrio



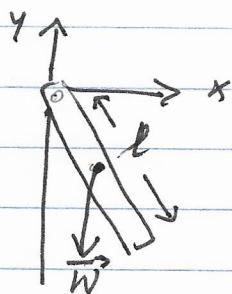
stabile
torso in
equilibrio

instabile
scavalca
dall'eq.

rispetto ad una piccola perturbazione

Se forze conservative \rightarrow en potenziale

stabile \leftrightarrow minimo
instabile \leftrightarrow massimo
insufficiente \leftrightarrow costante



$$V(\theta) = -\frac{mgl}{2} \cos \theta$$

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{mgl}{2} \sin \theta = \omega^2 \begin{cases} \theta=0 & \text{stabile} \\ \theta=\pi & \text{instabile} \end{cases}$$

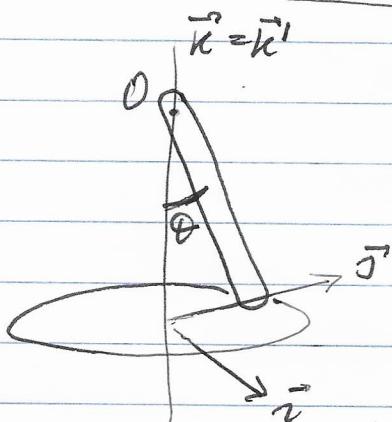
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{mgl}{2} \cos \theta \quad \begin{cases} \theta=0 & \text{stabile} \\ \theta=\pi & \text{instabile} \end{cases}$$

$$\vec{k} = \vec{k}'$$

$$\text{Asta che ruota } \vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

Riferimento S' rotante non inertiiale
 \rightarrow forza centrifuga

$$\text{En. pot. forza peso } V_1 = mg z_c = -mg \frac{l}{2} \cos \theta$$



Energia della forza centrifuga

Elemento di lunghezza dell'asta $s ; s+ds ; dm = \lambda ds$

$$dV_2 = -\frac{1}{2} dm \omega^2 s^2 = -\frac{1}{2} dm \underbrace{\omega^2 s^2 \sin^2 \theta}_{g^2} = -\frac{1}{2} \lambda \omega^2 s^2 \sin^2 \theta ds$$

e integriamo tra 0 e l

$$V_2 = -\frac{1}{6} \lambda \omega^2 l^3 \sin^2 \theta = -\frac{1}{6} \mu \omega^2 l^2 \sin^2 \theta$$

N.B.: [In questo caso non si può considerare la rettifica
ma solo nel c.d.vi. $M, \frac{l}{2}, s = \frac{m}{(\lambda s)}$, $V_2 = -\frac{1}{8} \mu \omega^2 l^2 \sin^2 \theta$]

$$V = V_1 + V_2 = -mg \frac{l}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} I \omega^2 l^2 \sin^2 \theta =$$

$$= -\frac{ml}{2} (g \cos \theta + \frac{1}{3} l \omega^2 \sin^2 \theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{ml}{2} (-g \sin \theta + \frac{2}{3} l \omega^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \begin{cases} (a) \sin \theta = 0 \\ (b) \cos \theta = \frac{3g}{2l\omega^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{for normale} \\ \text{equilibrio} \end{array}$$

(b) ente solo per $\omega^2 \geq \frac{3g}{2l}$ perché $\cos \theta \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= -\frac{ml}{2} \left[-g \cos \theta + \frac{2}{3} l \omega^2 (\omega^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] = \\ &= -\frac{ml}{2} \left[g \cos \theta + \frac{2}{3} l \omega^2 (2 \cos^2 \theta - 1) \right] \end{aligned}$$

Studiando il segno in estremi

(a) $\sin \theta = 0$

stabile per $\omega^2 < \frac{3g}{2l}$

instabile per $\omega^2 > \frac{3g}{2l}$

per $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$ $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$, $\frac{d^3V}{d\theta^3} = 0$; $\frac{d^4V}{d\theta^4} > 0$ stabile

Nel caso di valori elevati di ω la situazione

appena descritta per un orientamento in rotazione

Una piccola perturbazione fa diminuire progressivamente

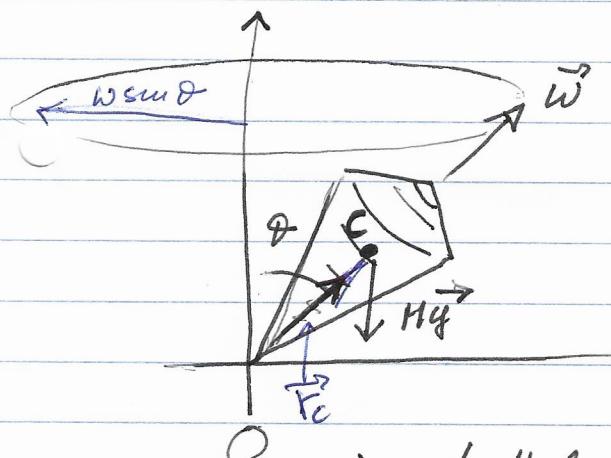
per la posta centripeta

$$(b) \omega \theta = \frac{3g}{2lw^2}$$

se $w^2 \geq \frac{3g}{2l} \rightarrow$ stabile

06/05/2016

Mot. giroscopici



Seconda eq. della dinamica
del sistema

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Sistema ripetuì con un getto fermo
in rotazione rispetto ad un
asse di simmetria -

rice tratta

L'unico movimento $\neq 0$ è quello del peso.

L'asse di rotazione è un asse di simmetria $\vec{P} = I\vec{\omega}$

Momento della forza peso $\vec{F}_C \times M\vec{g} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Se \vec{r}_C è verticale $\vec{M}^{(e)} = 0$

altrimenti $\vec{M}^{(e)} \neq 0$ e \vec{r}_C è quindi $\perp \vec{\omega}$

in un intervallo dt

$$d\vec{\omega} = \frac{M}{I} (\vec{r}_C \times \vec{g}) dt$$

$d\vec{\omega} \perp \vec{\omega}$ il modulo è costante ma cambia direzione

Quando $\vec{\omega}$ ruota intorno all'asse verticale che
forma per D -

L'estremo libero di $\vec{\omega}$ descrive una circonferenza
di raggio $w \sin \theta$

In dt tale rapporto descrive un angolo $d\varphi$

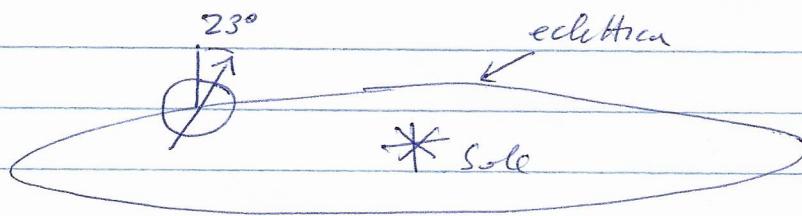
$d\omega = \omega \sin \theta d\varphi$ ma abbiamo anche
 $d\omega = \frac{r_c M g}{I} \sin \theta dt \rightarrow$ componente \perp a \vec{r}_c
e quindi:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_c M g}{I w} = \frac{r_c M g}{P}$$

che è la parte scalare della vel. angolare di precessione
& al momento delle forze forse eversante &
al momento angolare del sistema

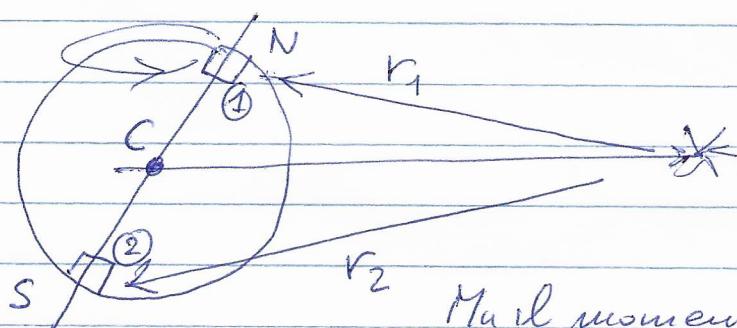
* Il momento delle forze agenti è \perp all'asse di rotazione

Analogia - precessione dell'asse terrestre



Le forze nel vettore 1 e 2 sono diverse perché la distanza dal sole è diversa

Anche i momenti rispetto al c.d.m. sono diversi
Il momento totale è $\neq 0$ e \perp alla figura



Ma il momento angolare \vec{P} è la vel. angolare $\vec{\omega}$ ris. \parallel all'asse polare

→ Il momento delle forze è \perp all'asse di rotazione

Quindi l'asse polare descrive un cono attorno alla direzione \perp all'eclettica - Precessione degli equinosti
Periodo 26000 anni (continguisce anche la Luna)

→ Le direzioni dell'ano terrestre non punterà
sempre verso le stelle polari - Tra 14000 anni → stella Vega -
Cambiamento anche le stagioni

Dinamica sui mezzi di forte estremità → stabilità
degli anni attorno ai quali avvengono le rotazioni

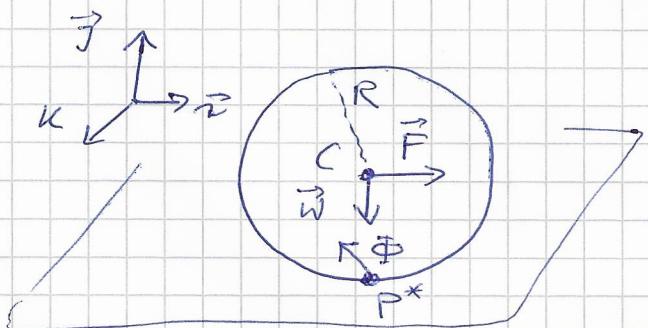
Giroscopio → ane costante anche se il veicolo cambia
direzione - Guida alla maneggevolezza -

Ma anche biciclette e motociclette sono più stabili
se mosse che ferme - (Non del tutto chiaro)

Le rotazioni delle ruote conferiscono momenti
angolari duri orizzontalmente

Anche il freestyle è stabile orizzontalmente - (?)

Dinamica del Rotolamento Puro



Ruota di raggio R

rotolamento puro $\dot{\theta}_c = \omega R$

Dinamica generale per lo
svoltamento nelle direzioni \vec{z}

foro \vec{w} ; reazione vincolare $\vec{\phi}$

Forza applicata:

$$\vec{F} = F \vec{z} \quad (\text{al c.d.m. } C) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(se avanza)} \\ \text{sposta o trascina} \end{array} \quad (F \geq 0)$$

L'oppone di momento $\vec{\Sigma} = -\varepsilon \vec{\kappa} \quad (\varepsilon \geq 0)$

→ i.e. mossa che fa girare le ruote (se avanza)

Le reazioni vincolari del foro sono P^*

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_L + \vec{\phi}_n = \phi_x \vec{z} + \phi_y \vec{y}$$

La componente $\vec{\Phi}_x = \phi_x \vec{i}$ (attiva) è necessaria perché non vi sia strisciamento - Attività attiva
 Limite superiore $|\Phi_x| \leq \mu_s \phi_y$

Moti di traslazione

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{w} + \vec{\Phi} + \vec{F} = m \vec{a}_c \quad (\text{F' eq.})$$

Le rotazioni sono soggette al c.d.m. dipendente dai momenti delle forze esterne

$$\textcircled{PAP} \quad \textcircled{M}_c^{(e)} = (\vec{r}^* - \vec{r}_c) \times \vec{\Phi} + \vec{\epsilon} = \frac{d \vec{r}_c}{dt} = \frac{d(F_c \omega)}{dt}$$

N.B.: \vec{w} e \vec{F} hanno momenti nulli rispetto a C -

$$\vec{a}_c = a_x \vec{i} \quad ; \quad \vec{w} = -\omega \vec{k}$$

$$\vec{\Phi}_n = \phi_x \vec{i} \quad ; \quad \vec{\Phi}_t = \phi_y \vec{j}$$

equazioni sullari

$$\phi_y = mg \quad ; \quad a_x = \frac{F + \phi_x}{m} \quad ; \quad |\phi_x| \leq \mu_s mg$$

$$- I_c \frac{d\omega}{dt} = R \phi_x - c$$

Per il moto rotolamento si ha

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad ; \quad a_x = R \frac{d\omega}{dt}$$

Risolvendo le equazioni per a_x e ϕ_x

$$- I_c \frac{a_x}{R} = R \phi_x - c$$

$$- I_c \frac{F + \phi_x}{mR} = R \phi_x - c$$

$$- I_c F - I_c \phi_x = R^2 m \phi_x - m R c$$

$$\phi_x (mR^2 + I_c) = c m R - I_c F \rightarrow \boxed{\phi_x = \frac{c m R - I_c F}{mR^2 + I_c}}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_x &= \frac{F}{m} + \frac{1}{m} \frac{\tau_{MR} - I_c F}{MR^2 + I_c} = \\
 &= \frac{1}{m} \frac{FR^2 + F/I_c + \tau_{MR} - I_c F}{MR^2 + I_c} = \\
 &= \frac{FR^2 + \tau R}{MR^2 + I_c} = \boxed{\frac{F + \frac{\tau}{R}}{m + \frac{I_c}{R^2}}} = \alpha_x
 \end{aligned}$$

Segue che sia $|\phi_x| \leq \mu_s mg$

(a) Solo forza $F \rightarrow$ trazione costante ($\vec{\tau} = 0$)

$$\alpha_x = \frac{F}{\frac{I_c}{R^2} + m} ; \quad \phi_x = \frac{-I_c F}{MR^2 + I_c}$$

↓ ↑
 sostituzione traslazione

NB: il segno di ϕ_x è < 0 - la forza di attrito si muove
nella stessa direzione del \vec{F} . Si poteva ~~essere~~ l'azione
dell'attrito è di opporsi al moto di P^* che
altrimenti scivolerrebbe nel verso di \vec{F}

La condizione $|\phi_x| \leq \mu_s mg$

$$F \leq \left(\frac{MR^2 + I_c}{I_c} \right) \mu_s mg$$

che dipende da F (non troppo grande) e μ_s (non troppo piccola)

(b) Solo coppia di momenti $\vec{\tau}$ ($\vec{F} = 0$)

$$\phi_x = \frac{\tau}{R + \frac{I_c}{MR}} ; \quad \alpha_x = \frac{\phi_x}{m}$$

In questo caso α_x ha segno > 0 poiché la forza di

(720)

altro ha il verso dell'acceleramento.

Si può pensare alla forza su una ruota che girea slitta e finisce di accendere l'altro.

In questi altri il polo P si muovebbe all'indietro.

L'ultima riga non è altrettanto slittamento.

En conclusione

$$K = K_c + K' ; \quad K_c = \frac{m v_c^2}{2} ; \quad K' = \frac{I c \omega^2}{2}$$

Teorema delle forze interne: momento K per il lavoro fatto

N.B.: la forza di attrito si trova non compresa.

$$(b) \quad \delta L = dK = \varepsilon d\theta = \varepsilon w dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dK_c = \vec{F}^a \cdot d\vec{r}_c = \vec{\Phi}_c \cdot \vec{V}_c dt = \Phi_x R w dt \\ dK' = M_c^a \cdot \vec{\omega} dt = I_c \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\omega} dt = (-R \Phi_x + \varepsilon) w dt \end{array} \right.$$

I contributi delle forze di attrito sono opposti - precisamente.

$$\text{Se } \vec{F} = 0, \quad \vec{\varepsilon} = 0$$

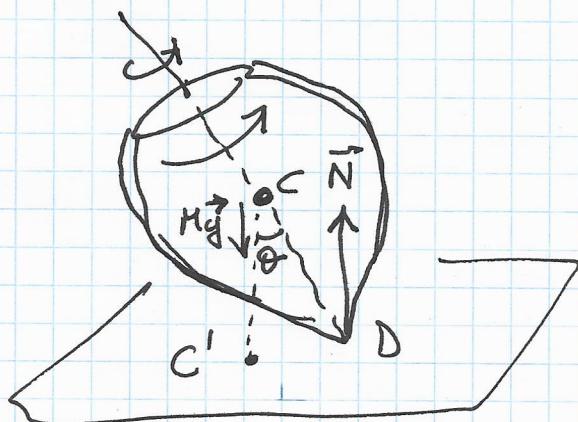
$$V_c = \text{const}, \quad \omega = \text{const}$$

GIROSCOPIO (Meccanico)

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{c}$$

Trottole

$$\left\{ \begin{array}{l} M\vec{g} + \vec{N} = M\vec{a}_c \\ \vec{M}_N = I_c \frac{d\vec{\omega}_c}{dt} \end{array} \right.$$



Approssimazioni:

$$\vec{P} = I_c \vec{\omega}_c \text{ intorno a } C$$

ma in realtà anche l'asse \vec{C} è dotato di un movimento di rotazione (precessione) con vel. ang. ω_p

Pertanto la nostra analisi assume che $\boxed{\omega_p \ll \omega_c}$

$M\vec{g}$ ed \vec{N} sono verticali $\rightarrow a_{cx} = 0$

Quindi la proiezione del baricentro resta in C' .

$\vec{M}_N = \vec{CD} \times \vec{N}$ è $\perp \vec{\omega}_c$ ed è orizzontale poiché \vec{N} è verticale

Quindi:

* $\vec{\omega}_c$ può cambiare solo in direzione ma non in modulo

$$\frac{d\vec{\omega}_c}{dt} \propto \vec{M}_N \text{ è } \perp \text{ a } \vec{\omega}_c \rightarrow \frac{d\omega_c}{dt} = 0$$

Quindi ~~precessione~~ $|\vec{P}|$ è costante = P

$$P = I_c \omega_c = I_c \omega_0$$

* Essendo nulla la componente verticale di \vec{M}_N

la componente verticale di $\vec{P} = \text{cost.}$

Dato che il suo modulo è anche costante

allora sarà costante anche θ

Quindi C resta immobile !

Q2

L'unico movimento possibile è quindi un precessione intorno a C - Quindi \vec{P}_n compie un cerchio intorno a C' con $R = DC \sin \theta$

Per calcolare ω_p consideriamo la proprietà sull'asse orizzontale

$$\dot{P}_n = P \sin \theta = I_c \omega_0 \sin \theta = \text{cost.}$$

$$M_n = CD \cdot N \cdot \sin \theta = l M g \sin \theta$$

\vec{F}_n rappresenta un vettore di modulo costante ruotante nel piano con velocità angolare ω_p per cui:

$$\frac{d\vec{P}_n}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{P}_n \rightarrow \left| \frac{d\vec{P}_n}{dt} \right| = \omega_p P_n$$

quindi:

$$l M g \sin \theta = M_N = \left| \frac{d\vec{P}_n}{dt} \right| = \omega_p P_n = \omega_p I_c \omega_0 \sin \theta$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{l M g}{I_c \omega_0}}$$

Esempio:

Calcolo di massima raffica $R = 0.1 \text{ m}$ ($I_c = \frac{1}{2} M R^2$)

$CD = l = 2R$ e $\omega_0 = 30 \text{ giri al secondo}$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1/30) \text{ s}} \approx 190 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_p = \frac{2 R M g \cdot 9.8 \text{ m s}^{-2}}{\frac{1}{2} M R^2 \cdot 190 \text{ s}^{-1}} = 2 \text{ s}^{-1}$$

$\omega_0 \approx 10^3 \omega_p$ che giustifica l'assunzione iniziale

In pratica se il piano di appoggio presenta attrito e θ resta fissa -

In questo caso la precedente avviene intorno a D
Stessa trattazione ma prendendo solo dei momenti
D invece di C.

L'accelerazione del baricentro è

$$a_c = \omega_p^2 r = \omega_p^2 l \sin\theta$$

e le componenti orizzontali delle forze è

$$f_t = Ma_c = M\omega_p^2 l \sin\theta$$

forche' $N = Mg$ la condizione che D resti fissa è

$$\frac{f_t}{N} = \frac{M\omega_p^2 l \sin\theta}{Mg} = \omega_p^2 \frac{l \sin\theta}{g} < \mu$$

Nel caso precedente con $\theta = 45^\circ$

$$\frac{\omega_p^2 l \sin\theta}{g} \approx \frac{45^{-2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.7}{9.8 \text{ m/s}^2} \approx 0.05 < \mu$$

molto realistica e soddisfatta in pratica -