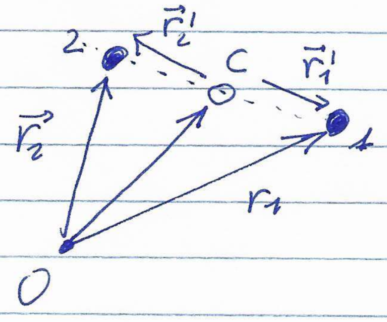
Sistemi di due corpi



m_1, m_2

Separiamo il moto del c.d.m. da quello rispetto al c.d.m.

moto relativo delle particelle
Lo studio del moto relativo è comune alla massa ridotta come un solo corpo

In S

$$\vec r_c = \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec r = \vec r_2 - \vec r_1$$

In S' con origine nel c.d.m.

$$\vec r_1' = \vec r_1 - \vec r_c = -\frac{\mu \vec r}{m_1} \quad ; \quad \vec r_2' = \vec r_2 - \vec r_c = \frac{\mu \vec r}{m_2}$$

massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $(< m_1, m_2)$

$$m_1 \vec r_1' + m_2 \vec r_2' = 0 \qquad \vec r_2' - \vec r_1' = \vec r_2 - \vec r_1 = r$$

Relazioni tra le posizioni delle 2 particelle rispetto al c.d.m. e $\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$

In S' (c.d.m.) $\vec r_1' = \vec r_1 - \vec r_c$; $\vec r_2' = \vec r_2 - \vec r_c$

Risolvendo le prime 2 eq. rispetto a $\vec r_1$ e $\vec r_2$ si ha

$$\vec r_1 = \vec r_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec r \quad ; \quad \vec r_2 = \vec r_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec r$$

e quindi

$$\vec r_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec r = -\frac{\mu}{m_1} \vec r \quad ; \quad \vec r_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec r = \frac{\mu}{m_2} \vec r$$

le due particelle e il c.d.m. sono allineati.

Supponiamo che S' abbia orientazione costante rispetto ad S.

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_c \quad ; \quad \vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \vec{a}_c$$

Vel. relativa e ~~acc~~ accel. relativa son indip. dal moto tra S e S'.

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2' - \vec{a}_1'$$

$$\vec{v}_1' = -\frac{\mu \vec{v}}{m_1} \quad ; \quad \vec{v}_2' = \frac{\mu \vec{v}}{m_2}$$

$$\vec{a}_1' = -\frac{\mu \vec{a}}{m_1} \quad ; \quad \vec{a}_2' = \frac{\mu \vec{a}}{m_2}$$

NB: In S' le vel e accel. hanno stessa direzione ma versi opposti (moto relativo). I loro moduli:

$$\frac{v_2'}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2'}{a_1'}$$

Le q.d.m. sono uguali e opposte

$$\vec{q}_1' = m_1 \vec{v}_1' = -\mu \vec{v} \quad ; \quad q_2' = m_2 \vec{v}_2' = \mu \vec{v} = q'$$

quindi in S' la q.d.m totale $\vec{Q} = 0$.

En. cinetica in S'

$$K' = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 = \frac{q_1'^2}{2m_1} + \frac{q_2'^2}{2m_2} =$$

$$= \cancel{\left(\frac{q'^2}{2m_1} + \frac{q'^2}{2m_2}\right)} = \frac{q'^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

cioè è la stessa di un punto singolo con massa μ e vel. pari alla vel. relativa.

Energia cinetica del moto relativo

$$\frac{K_1'}{K'} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \frac{K_2'}{K'} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \frac{K_2'}{K_1'} = \frac{m_1}{m_2}$$

Se uno dei due corpi ha massa molto maggiore dell'altro si muove con vel. ed en. cinetica molto minore.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \simeq m_2 \qquad (m_2 << m_1)$$

Per il terzo teorema del centro di massa (per due corpi).

$$\vec{P}_O = \vec{P}_C + \vec{r}_C \times (m_1 + m_2)\vec{v}_C$$

momento angolare rispetto al c.d.m. ed è indip. del Rif. (S o S')

$$\vec{P}_C' = P_C = \vec{r} \times \mu \vec{v}$$

Infatti: $\vec{P}_C = \vec{P}_C' = \vec{r}_1' \times m_1 \vec{v}_1' + \vec{r}_2' \times m_2 \vec{v}_2' =$

$$= (\vec{r}_2' - \vec{r}_1') \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu \vec{v}$$

Moto relativo dei due corpi

Riconducibile ad un punto con massa μ. Forze interne.

Cominciamo con un sistema <u>isolato</u>

Nel sistema inerziale S si ha

$$\underset{1 \to 2}{\vec{f}_{1(2)}} = m_1 \vec{a}_1 \; ; \quad \underset{2 \to 1}{\vec{f}_{2(1)}} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{f}_{1(2)} = -\vec{f}_{2(1)} \equiv -\vec{f}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{f}/m_2 \; ; \quad \vec{a}_1 = -\vec{f}/m_1 \qquad \vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

da cui si ottiene per il moto relativo

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{f} = \frac{\vec{f}}{\mu} \Rightarrow \vec{f} = \mu \vec{a}$$

In molti casi $\vec{f}$ dipende solo da r

$$\vec{f} = f(r)\vec{u}_r$$ dinamica analoga a quella di:

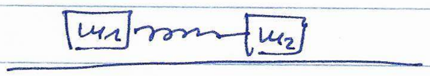
~~In~~ un Rf. inerziale S^* conservazione dell'en. meccanica e del momento angolare rispetto al centro.

Se $m_1 \gg m_2$ il c.d.m. è vicino a ①, S^* coincide con S' e $\mu \simeq m_2$

Terra m_2, Sole m_1

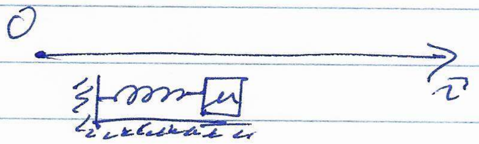
→ si muove come si muoverebbe, in un ref inerziale S^* un punto di massa μ nel campo gravitazionale con origine nel Sole

Due corpi collegati da una molla



Velocità iniziali dirette lungo l'asse della molla.

Il c.d.m. si muove con $\vec{V} = \vec{V}_c$



$\xi = (x_2 - x_1) - l_0$ allungamento molla

$$\vec{f} = \mu\vec{a} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k}{\mu}\xi = 0 \qquad \text{(oscillatore armonico)}$$

$$\xi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Il moto relativo è quindi oscillatorio

L'unica forza interna è conservativa. L'en. pot. interna è

$$\delta L^{(2)} = \vec{f}\cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -k\xi\, d\xi = -d\left(k\frac{\xi^2}{2}\right) \equiv -dV$$

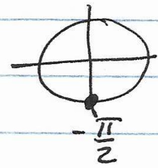
$$V_{12}^{(2)} = k\frac{\xi^2}{2} = \frac{k\left[(x_2 - x_1) - l_0\right]^2}{2}$$

<u>Blocchi + molla</u> a $t=0$ la molla <u>non è deformata</u>
<u>e $\vec{V}_2(0) = v_0 \vec{i}$</u> mentre (1) è fermo

a $t=0$ $\quad v_C = \dfrac{m_2 \vec{v}_2}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2 v_0}{m_1+m_2}\,\vec{i} = \underline{\text{cost}}$; $X_C(0)$ a $t=0$

$$X_C(t) = X_C(0) + v_C t$$

Moto relativo



$$\begin{cases} \vec{r}(0) = l_0 \vec{i} \rightarrow \underline{\xi(0) = 0} \\ \vec{V}(0) = v_0 \vec{i} \longrightarrow \underline{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = v_0} \end{cases}$$

$$\xi = A\cos\varphi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -A\sin\varphi$$

quindi dal dell' oscillatore armonico

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad ; \; A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

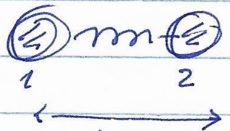
$$\rightarrow x = l_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

(da $x_1' = x_1 - x_c$ etc.)

$$\begin{cases} X_2(t) = X_c(t) + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(l_0 + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) \\ X_1(t) = X_c(t) - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\left(l_0 + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \end{cases}$$

<u>Molecole biatomiche</u>

H_2 ; HD $\quad m_2 \simeq 2m_1$
(p) $\quad$ (p+n)



r_0 equilibrio

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$H_2 \rightarrow \mu_{H_2} \simeq \dfrac{m_p}{2}$ $\qquad$ HD $\quad m_D \simeq m_p + m_n \simeq 2m_p$

$$\mu_{HD} \simeq \frac{2}{3} m_p$$

$$\frac{\nu_{HD}}{\nu_{H_2}} \simeq \sqrt{\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{HD}}} \simeq \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Se il sistema non è isolato può essere molto più complicato.

Caso semplice: campo esterno uniforme

analogo a due corpi in un Rif con accel. costante rispetto ad un Rif. inerziale.

Campo gravitazionale sui due corpi

$$\begin{cases} m_2\vec{a}_2 = \vec{f}_{2(1)} + m_2\vec{g} \equiv \vec{f} + m_2 g \\ m_1\vec{a}_1 = \vec{f}_{1(2)} + m_1\vec{g} \equiv -f + m_1 g \end{cases}$$

dividendo la prima per m_2 e la seconda per m_1 e sottraendo

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{\vec{f}}{m}$$

che è la stessa di un sistema isolato.

La differenza è nel moto del c.d.m.

Due corpi interagiscono tra loro con l'attrazione gravit. $\vec{f}$ ma sul corpo ② agiscono anche forze esterne

$$\begin{cases} m_2\vec{a}_2 = \vec{f}_{2(1)} + f^* = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} + \vec{f}^* \\ m_1\vec{a}_1 = \vec{f}_{1(2)} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \end{cases}$$

dividendo m_2 e m_1 e sottraendo

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r} + \frac{f^*}{m_2}$$

$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \rightarrow$ eq. diff. (vettoriale) non omogenea del moto relativo

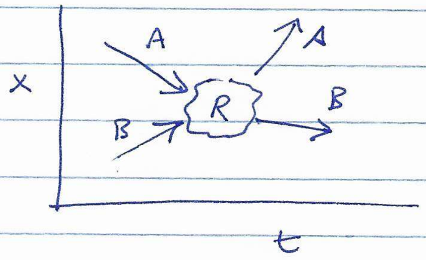
In generale le 3 eq. scalari si devono integrare numericamente.

Fenomeni d'urto

Interazioni fondamentali per collisioni tra particelle
Rutherford (1901) scoperta del nucleo dell'atomo
Angoli ed energie e nuove particelle che si formano.
[Ma palline da ping pong e locomotive]

Se A e B iniziali restano le stesse → diffusione
Se diverse → reazione

} collisione



In genere occorrono Mecc. Quantistica e Relatività ma alcuni principi di conservazione generale (energia e q.d.m.) sono deducibili anche classicamente

Urti: forze elevate per tempi brevi

Biliardo, automobili-incidenti, palle e mazze, tennis etc
Stato iniziale (prima) e stato finale (dopo)

Nella zona di interazione R il sistema è abbastanza isolato.
In un sistema isolato si ha la conservazione della:
- quantità di moto
- momento angolare
- energia

Conservazione di grandezze dinamiche negli urti

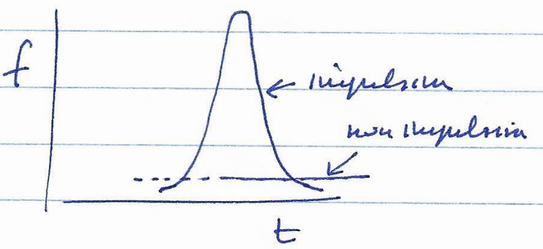
$\Delta t = t_f - t_i$

$$\begin{cases} \vec{J}_1 = \Delta \vec{q}_1 = \Delta \vec{q}_1^{(i)} + \Delta q_1^{(e)} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{f}_{1(2)}\, dt + \int_{t_i}^{t_f} f_1^{(e)}\, dt \\ J_2 = \Delta \vec{q}_2 = \Delta \vec{q}_2^{(i)} + \Delta q_2^{(e)} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{f}_{2(1)}\, dt + \int_{t_i}^{t_f} f_2^{(e)}\, dt \end{cases}$$

Se le forze esterne non sono impulsive si possono trascurare.
(in assenza di vincolo)

$$\vec{f}_{1(2)} = \vec{f}_{2(1)} \Longrightarrow \Delta \vec{q}_1 \simeq -\Delta \vec{q}_2 \longrightarrow \Delta \vec{Q} \simeq 0$$

Per il baricentro la gravità è non impulsiva ma le reazioni vincolari sono impulsive.



Esempio: palla da Baseball $m = 140\,g$ $\quad v_0 = 30\,m/s$ orizzontale
Colpita dalla mazza $v_f = 40\,m/s$ anche verso l'alto 30 gradi.
L'urto dura $\Delta t = 2\,ms$
Determinare $\vec{J}$ ricevuto nell'urto

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_0 = m\left(v_f \cos\frac{\pi}{6} + v_0\right)\vec{i} + m\, v_f \sin\frac{\pi}{6}\,\vec{j}$$

$$J = m\sqrt{v_f^2 + v_0^2 + 2 v_f v_0 \cos\frac{\pi}{6}} = 9.47\ Kg\,m/s$$

Il valore medio della forza F_m

$$\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} \cdot dt \simeq \vec{F}_m \Delta t$$

$$F_m = \frac{J}{\Delta t} = 4736\,N \gg mg = 1.4\,N$$

In generale quindi se sistema isolato e forze esterne non impulsive $\quad \vec{Q}(t_i) \simeq \vec{Q}(t_f)$

Se uno dei corpi è vincolato le reazioni possono essere impulsive e la conservazione della q.d.m. non è garantita.

Analogamente ~~ph~~ per la conservazione del momento angolare $\vec{P}$.

$$\vec{P}(t_2) \simeq \vec{P}(t_1)$$

Si conserva anche per reazioni impulsive con momento nullo
Quindi negli urti tra sistemi vincolati si può conservare il momento angolare ma non la q.d.m.

Energia

Normalmente, dato che Δt piccolo il lavoro delle forze esterne è trascurabile → Si conserva l'energia propria
Non necessariamente l'en. cinetica dei corpi interagenti.
Urto elastico : si conserva l'en. cinetica
Urto anelastico : non si conserva en. cin.

22/04

Urti: limitazioni dovute alle leggi di conservazione.

Sistema isolato e Rif. inerziale S

Conservazione di $\vec{Q}$, $\vec{P}$ e dell'en. totale.

Per la q.d.m. → conservazione v_c e quindi en. cinetica del c.d.m. $K_c = \frac{1}{2} M v_c^2$ resta costante.

Il carattere **elastico** ($K = K' + K_c = cost$) o **anelastico** dipende dalla conservazione di K' (en. cinetica in S' rispetto al c.d.m.)

In generale le condiz. iniziali non sono sufficienti per una descrizione completa. Ma se si conosce la vel. di una delle particelle dopo l'urto allora si può ricavare tutto.

* Caso semplice: diffusione elastica di due particelle identiche. Una particella è inizialmente ferma nel lab.

Per la conserv. della q.d.m.

$$\vec{q}_{1i} + \vec{0} = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \rightarrow q_{1i}^2 = q_{1f}^2 + q_{2f}^2 + 2\vec{q}_{1f} \cdot \vec{q}_{2f}$$

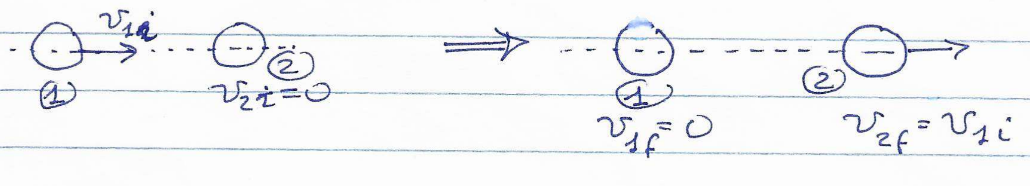
ma per la conserv. dell'energia cinetica

$$\frac{q_{1i}^2}{2m} = \frac{q_{1f}^2}{2m} + \frac{q_{2f}^2}{2m} \rightarrow q_{1i}^2 = q_{1f}^2 + q_{2f}^2$$

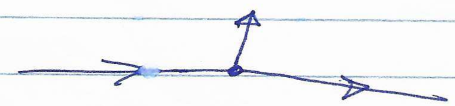
che implica che il prodotto scalare sia $= 0$.

→ Le q.d. moto finali devono essere $\perp$ oppure una delle due $= 0$.

↳ $\vec{q}_{2f} = \vec{q}_{1i}$ → urti unidimensionali

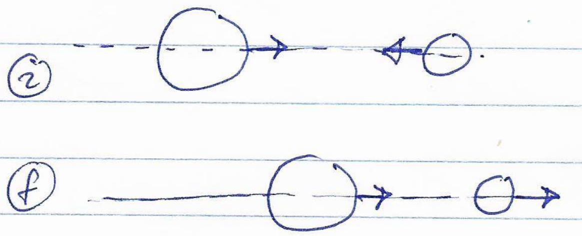


i.e. biliardo



nel caso 2d

Urti unidimensionali (tutto è ricavabile dallo stato iniziale)



Urto elastico unidimensionale
Urto centrale - moto lungo la congiungente dei c.d.m.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases}$$

Due equazioni e due incognite $\underline{v_{1f} \text{ e } v_{2f}}$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 \underbrace{(v_{1i} - v_{1f})} (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \cdot \overbrace{(v_{2f} + v_{2i})}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

$$\boxed{v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}}$$

$$v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$$

sostituendo nelle eq di conservazione ~~del momento~~ della q.d.m. si ottengono v_{1f} e v_{2f}

Le soluzioni sono CHECK

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \dfrac{(m_2 - m_1) v_{2i} + 2 m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

se $m_1 = m_2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$

Le due particelle si scambiano le velocità.

Quando uno è fermo $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad ; \quad v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Il bersaglio procede in avanti se $m_1 > m_2$ altrimenti rimbalza all'indietro.
In generale c'è un trasferimento sia di q.d.m. che di energia

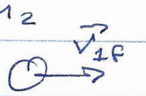
Urto centrale elastico

$$K_{2f} = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} K_{1i} = f\, K_{1i}$$

$$f = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\right)^2 K_{1i} = (1-f)\, K_{1i}$$

f $m_1 > m_2$



f $m_1 < m_2$

f = frazione di energia cinetica iniziale trasferita

Ad esempio nei reattori nucleari termici vanno frenati i neutroni veloci per aumentare la prob. che innescano altre fissioni _ Reazione a catena

Moderatori leggeri: H o D con masse simili a m_n

$m_2 = m_1 \rightarrow f = 1$

$m_2 = 2m_1 \rightarrow f = 8/9$

$m_2 = 206\, m_1 \quad f = 0.02$

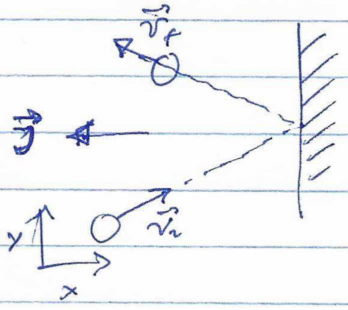
Se il corpo fermo ha massa molto grande $m_2 \gg m_1$

$$\begin{cases} v_{1f} \simeq -v_{1i} \\ v_{2f} \simeq 0 \end{cases}$$

Il corpo rimbalza all'indietro con velocità opposta a quella iniziale –

Urti semplici nel piano

In generale si devono conoscere i dettagli della collisione
Le leggi di conservazione non bastano.
Alcuni casi semplici: Urto contro una parete.



Non c'è trasferimento di en. cinetica perché la parete è $M \gg m$.
Urto elastico. Lavoro delle forze interne del sistema: palla + muro $= 0$

$$\Delta \vec{q} = \vec{J} = -\Delta \vec{Q} \Rightarrow \begin{cases} m(v_{fx} - v_{ix}) = J_x = -M V_{fx} \\ m(v_{fy} - v_{iy}) = J_y = -M V_{fy} = 0 \end{cases}$$

palla   muro

NB: La forza di reazione vincolare è $\perp$ al muro.
Per la conservazione dell'en. cinetica totale

$$m\frac{v_i^2}{2} - m\frac{v_f^2}{2} = M\frac{V_f^2}{2} = \frac{J^2}{2M} = \frac{m^2(v_{ix}^2 - v_{fx}^2)}{2M}$$

Essendo $v_{fy} = v_{iy}$

$$m\frac{v_i^2}{2} - m\frac{v_f^2}{2} = m\left(\frac{v_{ix}^2}{2} - \frac{v_{fx}^2}{2}\right) = m(v_{ix} - v_{fx})\frac{v_{ix} + v_{fx}}{2}$$

da cui si ottiene

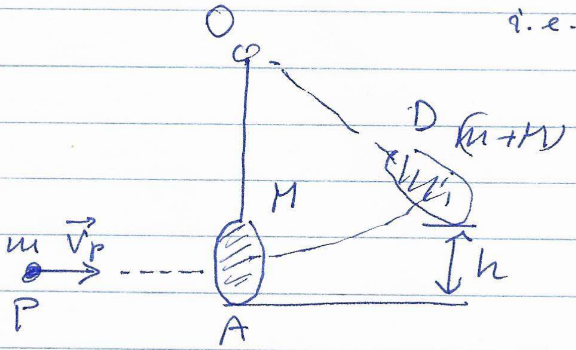
$$v_{fx} = \frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m}{M} + 1} v_{ix}$$

essendo $m \ll M \rightarrow v_{fx} \simeq -v_{ix}$ e quindi $|v_f| \simeq |v_i|$

Si inverte il segno della componente normale al muro mentre quella tangenziale è inalterata.

Urti completamente anelastici: pendolo balistico

Per misurare in modo semplice la vel. di un proiettile.



i.e. su cubetto di sabbia - anelastico -

P → m

A → M

D → (m + M)

Nell'urto i momenti rispetto al polo O del peso e della reazione vincolare della corda sono nulli - quindi il momento angolare si conserva per D = P + A

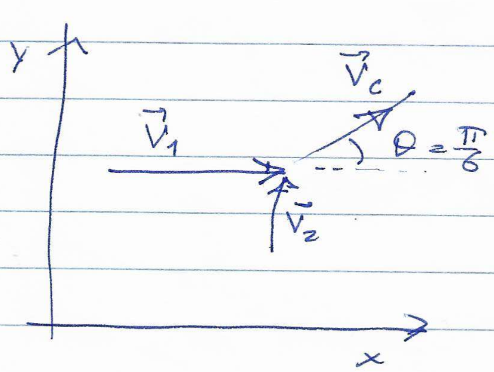
$$\vec r \times m \vec v_P = \vec r \times (m+M)\vec v_D \longrightarrow v_D = \frac{m}{m+M} v_P$$

Dopo l'urto l'unica forza che compie lavoro è la gravità che è conservativa per cui l'energia meccanica di D si conserva

$$\frac{1}{2}(m+M) v_D^2 = (m+M) g h$$

e sostituendo $\quad v_P = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}$

Caso bidimensionale anelastico: urto tra automobili



$A_1 \quad m_1 = 1000\,kg \quad v_1 = ?$

$A_2 \quad m_2 = 1200\,kg \quad v_2 = 80\,km/h$

Dopo l'urto procedono insieme con velocità V_c la cui direzione è data.

Urto completamente anelastico ma la q.d.m. totale si conserva

Per le componenti x e y abbiamo

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1+m_2) v_c \cos\theta \\ m_2 v_2 = (m_1+m_2) v_c \sin\theta \end{cases}$$

dividendo membro a membro

$$v_1 = v_2 \frac{m_2}{m_1} \cot\theta \quad , \text{da cui per } \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow v_1 = 166 \, Km/h$$

e inoltre $v_c = 87 \, Km/h$

La diminuzione di en. cinetica (en. di deformazione e calore) è

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_c^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right) = -717 \, KJ$$

Collisioni tra due corpi e moto relativo

Sistema S' nel c.d.m.

Sistema isolato: rispetto ad S si ha conservazione di $\vec{Q}$, $\vec{P}$ ed energia.
Il c.d.m. si muove con vel. cost. in S e quindi anche S' è inerziale. Queste grandezze si conservano quindi anche in S' anche se con valori diversi.
In generale $\vec{Q} \neq 0$ ma ovviamente $\vec{Q}' = 0$ e quindi anche in S'

$$\Delta\vec{Q}' = \Delta\vec{q}_1' + \Delta\vec{q}_2' = 0$$

Ciascuna variazione di q.d.m. è invariante rispetto al Ref.

$$\Delta\vec{q}_i' = \Delta\vec{q}_i \equiv \vec{J}_i \quad (i = 1,2)$$

L'impulso trasferito $\vec{J}$ è quindi invariante dal Ref.

$$\vec{J} \equiv \vec{J}_2 = -\vec{J}_1$$

Dimostrazioni che l'impulso trasferito è invariante del Rif

S ; S' ; v_c

$$\vec{q}_i = \vec{q}_i\,' + m\vec{v}_c \quad ; \quad \vec{q}_f = \vec{q}_f\,' + m\vec{v}_c$$

$$\Delta\vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i = \vec{q}_f\,' - \vec{q}_i\,' = \Delta\vec{q}\,'$$

La massa ridotta è costante nella diffusione

L'impulso trasferito nell'urto è $\propto$ alla variazione della vel. relativa.

ricordiamo che

$$\vec{q}_1\,' = m_1\vec{v}_1\,' = -\mu V \quad ; \quad \vec{q}_2\,' = m_2\vec{v}_2\,' = \mu\vec{V}$$

quindi

$$\vec{J} = \Delta\vec{q}_2\,' = -\Delta\vec{q}_1 = \mu(\vec{V}_f - \vec{V}_i)$$

Se l'impulso trasferito è piccolo la velocità relativa è poco cambiata

La conservazione di Q implica che anche K_c (e K' se elastico) sia costante.

La variazione di K' è uguale al lavoro complessivo delle forze interne.

Urti elastici: forze interne solo conservative. Sono nulle la variazione dell'en. pot interna e dell'en. interna

$$\Delta K = \cancel{\Delta E}\, \Delta K' = L^{(i)} = -\Delta V^{(i)} \Rightarrow \Delta(K' + V^{(i)}) = \Delta U = 0$$

Durante l'urto i corpi si possono deformare ma una volta terminato riprendono la configurazione iniziale.

Grado di (an) elasticità dell'urto: variazione di K'.

In fisica nucleare

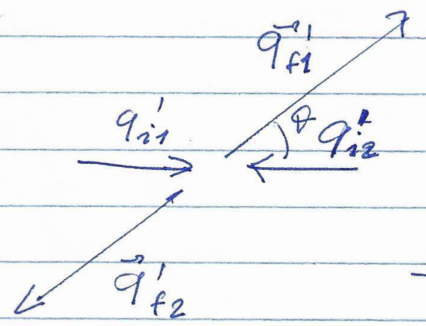
$$Q^* = \Delta K' = K_f' - K_i'$$

endoenergetica $Q^* < 0$; esoenergetica $Q^* > 0$

elastica $Q^* = 0$

Collisioni ~~ela~~ elastiche

$K' = \text{cost}$ quindi $K' = \frac{1}{2}\mu v^2$ anche v (in modulo)
vel. relativa è costante $\rightarrow$ $v_i = v_f$
Quindi nel rif. del c.d.m. i moduli delle vel (v_1' e v_2') e le en. cinetiche delle singole particelle (K_1' e K_2') non cambiano in un urto elastico.
Anche i vettori $\vec{q}_1'$ e $\vec{q}_2'$ restano uguali e opposti ma possono ruotare $\rightarrow$ distribuzione angolare



Collisioni anelastiche

Cambia il modulo q' delle q.d.m. dei corpi.
Endoenergetica: q' diminuisce
Esoenergetica: q' aumenta
Urto completamente anelastico: ($K_f' = 0$) le particelle sono ferme rispetto al c.d.m. e si comportano come una unica entità
In questo caso lo stato iniziale e la conservazione della q.d.m determinano completamente lo stato
Massima diminuzione dell'en. cinetica

$$\Delta K = -K_i' = -\frac{1}{2}\mu v^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2$$

Moto relativo e urti centrali elastici

direzioni iniziale $\vec{v}$ coincide con $\vec{r}$

↑ vel relativa

La forza di interazione è sempre $/\!/ \,\vec{r}$ quindi $\vec{v}$ ed $\vec{r}$ si mantengono paralleli. e così pure $\vec{J}$.

La vel. relativa subisce variazioni solo lungo questa direzione. Se l'urto è elastico $\vec{v}_f = -\vec{v}_i$

$$\vec{J} \,/\!/\, \vec{v}_i \rightarrow \vec{J} = \alpha\mu\vec{v}_i$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + (\vec{J}/\mu) = (1+\alpha)\vec{v}_i$$ Se elastico $|v_f| = |v_i|$

e quindi $|1+\alpha| = 1 \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow \boxed{v_f = -v_i}$

Velocità dei due corpi nello stato finale.

$$\begin{cases} \vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2f} \\ m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \end{cases}$$ $[\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1']$

28/04/2016

da cui

$$\begin{cases} \vec{v}_{1f} = \dfrac{(m_1-m_2)\vec{v}_{1i} + 2m_2\vec{v}_{2i}}{m_1+m_2} \\ \vec{v}_{2f} = \dfrac{(m_2-m_1)\vec{v}_{2i} + 2m_1\vec{v}_{1i}}{m_1+m_2} \end{cases}$$

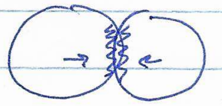
Queste relazioni valgono anche nel caso di interazioni a contatto tra corpi estesi non rotanti. dischi o palle da biliardo.

→ Coefficiente di anelasticità

Anche nel biliardo il "rumore" corrisponde ad una certa anelasticità.

Anelasticità: confronto tra i moduli di q_f' e q_i' delle q.d.m. nel riferimento del c.d.m.

Coeff. di anelasticità (restituzione) $e = \dfrac{q_f'}{q_i'}$



contatto tra palline

Impulso di deformazione J_d

Impulso di restituzione J_r

$$e = \frac{q_f'}{q_i'} = \frac{J_r}{J_d}$$ in generale $J_r < J_d \Rightarrow e < 1$

$e = 1$ urto perfettamente elastico

In un urto elastico la vel. relativa cambia segno prima e dopo l'urto.

Per urto elastico si può scrivere

$$\vec{q}_f{}' = \mu \vec{v}_f = -\mu \vec{v}_i = -\vec{q}_i{}'$$

estensione agli urti anelastici

$$\vec{q}_f{}' = -e\,\vec{q}_i{}' \Rightarrow \vec{v}_f = -e\,\vec{v}_i$$

La vel. relativa dopo l'urto ha quindi modulo inferiore. $e < 1$

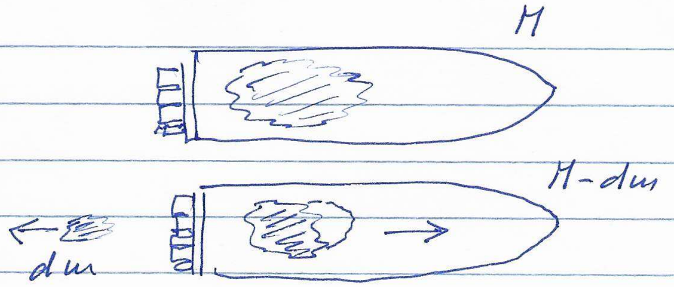
$$\begin{cases} \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f} = -e(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \\ m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{1f} = \dfrac{(m_1 - e m_2)\vec{v}_{1i} + m_2(1+e)\vec{v}_{2i}}{m_1+m_2} \\ \vec{v}_{2f} = \dfrac{(m_2 - e m_1)\vec{v}_{2i} + m_1(1+e)\vec{v}_{1i}}{m_1+m_2} \end{cases}$$

In un urto anelastico si ha sempre una riduzione di en. cinetica

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}(1-e^2)\,|\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}|^2$$

Moto dei razzi – Sistemi a massa variabile



Forze interne: variazione della q.d.m. delle singole parti

Razzo: propulsione a reazione.

Espulsione ad alta velocità dei prodotti di combustione del propellente. [Tecnicamente anche l'auto è a massa variabile]
Conoscendo la quantità di gas espulsa e la velocità si può determinare la forza di spinta anche senza conoscere i dettagli della combustione.

Sistema: razzo + gas uscente

$$dm = -dM > 0$$

La q.d.m. totale è $\vec{Q}(t) = M(t)\,\vec{V}(t)$

← vel in S inerziale

$\vec{u}$ = vel. delle particelle espulse rispetto ad un rif. solidale con il razzo. Indip. dalla vel. del razzo $\vec{u}$ = cost

Nel Rif inerziale S a $t+dt$

$$\underbrace{\vec{V}}_{\text{razzo}}(t+dt) = \vec{V}(t) + d\vec{V}$$

$$\underbrace{\vec{V}^*}_{\text{gas espulso}} = \vec{V}(t+dt) + \vec{u} = \vec{V}(t) + d\vec{V} + \vec{u}$$

$$\vec{Q}(t+dt) = [M(t) - dm](\vec{V} + d\vec{V}) + dm(\vec{V} + d\vec{V} + \vec{u})$$

$$d\vec{Q} = \vec{Q}(t+dt) - \vec{Q}(t) = M\,d\vec{V} + \vec{u}\,dm$$

I^a eq. cardinale $\quad d\vec{Q} = \vec{F}^{(e)}\,dt$

$M(t)$

$$d\vec{Q} = M d\vec{v} + dm\vec{u} = \vec{F}^{(e)} dt \Rightarrow$$

$$M(t) M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{(e)} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{S}$$

Forza di spinta $\quad \vec{S} = -\vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{u}\frac{dM}{dt}$

Se si conosce $M(t)$ si può ricavare l'accelerazione
Se $F^{(e)}$ dominata a grandi dei suoi corpi si può considerare
questi agenti solo su M e non su dm.
Equazione simile alla dinamica di un punto.

(a) $\underline{F^{(e)} \simeq 0}$ e $\vec{u}$ direzione costante coincidente ~~con~~ con $\vec{v}_0$ iniziale

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{\imath} \quad , \quad \vec{u} = -u\vec{\imath}$$

Il razzo accelera solo a causa della forza di spinta $S \parallel \vec{\imath}$.
$\rightarrow$ <u>1-d problema</u> $\rightarrow$ moto rettilineo

$$M(t)\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} = -u\frac{dM}{dt}$$

a $t=0$ $\quad M(t) = M_0 \qquad M_f$ valore finale

$$dv = -u\frac{dM}{M} \quad \rightarrow \int \rightarrow \quad v_f - v_0 = -u \ln\frac{M_f}{M_0}$$

$$v_f = v_0 + u \ln\frac{M_0}{M_f}$$

M_c = massa complessiva del carburante , M_u = massa del razzo a vuoto

$$M_0 = M_c + M_u \quad ; \quad M_f = M_u$$

$$v_{MAX} = v_0 + u \ln\left(1 + \frac{M_c}{M_u}\right)$$

Quindi per aumentare v_{max} conviene aumentare u e v_0 piuttosto che M_0/M_f.

$$u \simeq 2-4 \text{ Km/sec}$$

Per aumentare v_0 razzi a molti stadi.
In assenza di $F^{(e)}$, il valore di v_{max} è indipendente dalla velocità con cui si consuma il carburante.

(b) ~~Campi gravitazionali~~

Trascuriamo attriti e ~~vel del~~ quanto nel gas espulso.

$$F^{(e)} = M\vec{g} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{u}}{M}\frac{dM}{dt} \qquad (\vec{u}, \vec{g} \text{ costanti})$$

$$\int \rightarrow \quad \vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{u}\ln\frac{M_f}{M_0} + (t-t_0)\vec{g}$$

$\vec{v}_0 = 0$, $\vec{u}$ verticale

La vel a t_f è anche verticale ma diretta verso l'alto e con modulo

$$v_f = u\ln\frac{M_0}{M_f} - (t_f - t_0)g$$

In questo caso conviene bruciare rapidamente il combustibile perché, più breve è $(t_f - t_0)$ più alta è la vel. finale raggiunta.

Corpi Rigidi (solidi)

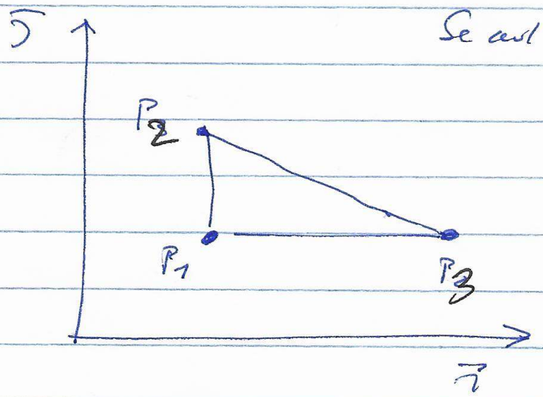
6 gradi di libertà: OK con le eq. cardinali –
Le vel. dei vari punti sono definite dalla vel. del c.d.m.
e dalla vel. angolare –
→ Composizione di traslazione e rotazione attorno ad
un asse opportuno
Q.d. moto + Momento angolare. –
Rotazioni – momenti di inerzia
Eq. cardinali
Sistemi rigidi con asse fisso –
En. cinetica traslazionale e rotazionale
Lavoro
Statica, urti; rotolamento
Cenni di teoria dell'elasticità

Sistema rigido

Corpo indeformabile in cui le distanze tra coppie di punti
restano invariate → c.d.m. anche invariato rispetto ad
ogni punto –
NB: nulla è assolutamente rigido – deformazioni –
elasticità – vibrazioni.
* Schematizzazione: grande vantaggio per lo studio del moto
6 gradi di libertà = eq. cardinali.
La posizione nello spazio è fissa se si conoscono le
coordinate di 3 punti non allineati → Terna cartesiana
Coordinate dell'origine e i coseni direttori degli assi
della terna. Sono 9 ma solo 3 indipendenti.
Moto di una terna cartesiana rispetto ad un'altra.

3 punti P_1, P_2, P_3

$A \equiv (2,2,0)$ $B(2,4,0)$ $C \equiv (6,2,0)$



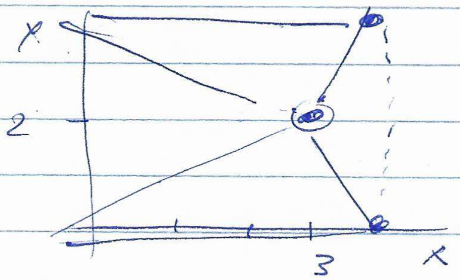
Se ad un diverso istante

$x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $z_1 = 0$

$x_2 = 4$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$

Si può determinare la posizione di tutti i punti?

NO perchè la conoscenza delle distanze relative da 3 eq. quadratiche – ambiguità



~~30~~ 29/04/2016

Cinematica

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_\tau$$

vel. di trascinamento

S' sistema rigido

Le velocità rispetto ad S' sono nulle.

La vel. rispetto ad S è data da ~~z~~ $\vec{v}_\tau$

$$\vec{V} \equiv \vec{V}_\tau = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{r}(t) - \vec{R}(t)]$$

e per due punti A e B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

relazioni tra le vel. di coppie di punti in un sistema rigido

$\vec{\omega}$ non dipende né dai punti né dall'origine del Rif. → tipica del corpo rigido –

Se A coincide con il c.d.m. C

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)$$

$\vec{v}_C$ e $\vec{\omega}$ descrivono quindi il moto del sistema

Moto traslatorio puro

$\vec{\omega} = 0 \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_C$

traiettorie dei punti sono // e come se da una traslazione

Q. d. m → $\vec{Q} = M\vec{v}_C$

Momento angolare – polo ≡ c.d.m.

$$\vec{P}_C = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{q}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times m_i \vec{v}_i =$$

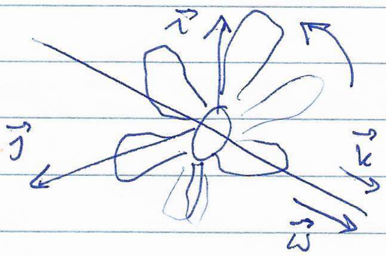
$$= \left(\sum_i m_i \vec{r}_i - M\vec{r}_C\right) \times \vec{v}_C = 0$$

avendo utilizzato $\vec{v}_i = \vec{v}_C$; $\sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_C$

Cambiamento polo $\Omega \neq C$

$$\vec{P}_\Omega = \vec{P}_C + (\vec{r}_C - \vec{r}_\Omega) \times \vec{Q} = (\vec{r}_C - \vec{r}_\Omega) \times \vec{Q}$$

Moti rotatorio con asse fisso



i. c. Ventilatore.

assi di rotazione costanti

S e S' $\quad$ z e z' coincidenti con l'asse di rotazione –

$O \equiv O'$

La posizione di S' rispetto ad S richiede un solo parametro scalare: angolo tra $\vec{i}$ e $\vec{i}'$

$\vec{V}(t)$ ed $\vec{R}$ sono nulli

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i$$

I punti sono fissi rispetto ad S' e descrivono traiettorie circolari in S

$\vec{Q} = M\vec{v}_C$ è nullo se il c.d.m. si trova sull'asse di rotazione

Se $\vec{Q} \neq 0$ le forze esterne sono esercitate dai vincoli.

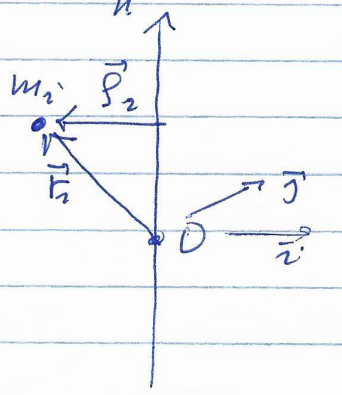
* Il momento angolare di un sistema rigido rotante in generale non è $\parallel \vec{\omega}$

$$\vec{P} = \vec{P}_{\parallel} + P_{\perp}$$

Polo O del sistema S, $\vec{\omega} \parallel \vec{k}$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{r}_i = z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i \qquad \text{ove } \vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$$



$$\vec{P} = \sum_i (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i[\vec{\omega} \times (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i)] =$$

$$= \vec{P}_{\perp} + \vec{P}_{\parallel}$$

$$\vec{k} \times \vec{\omega} = 0$$

$$\vec{P} = \sum_i (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) =$$

$$= \sum_i m_i z_i \vec{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} =$$

$$= -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i + \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}$$

Il componente // del momento angolare non dipende dalla posizione del polo O sull'asse di rotazione ed è dato da

$$P_{//} = \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} \qquad \rho_i = |\vec{\rho}_i|$$

Momento di Inerzia

$$\boxed{I = \sum_i m_i \rho_i^2} \rightarrow \vec{P}_{//} = I\vec{\omega}$$

Il componente trasverso $\boxed{P_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i}$

dipende dalla posizione di O sull'asse e si annulla se questo è un asse di simmetria.

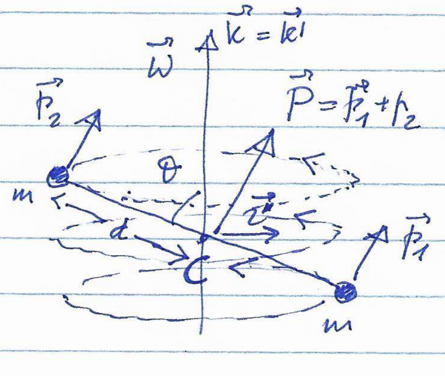
Ad ogni massa m_i alla quota z_i e vettore $\vec{\rho}_i$ ne corrisponde un'altra z_i ; $-\vec{\rho}_i$

$$\boxed{\vec{P} = I\vec{\omega} + P_\perp}$$

Per un corpo rigido si può definire una ~~terna~~ terna di assi ~~tr~~ ortogonali → assi principali di inerzia per cui $P_\perp = 0$

Quando il punto è il c.d.m → assi centrali di inerzia.

Esempio



Def. momento angolare rispetto a C

$$v = \omega d \sin\theta$$

$$|\vec{P}| = P = 2m\omega d^2$$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

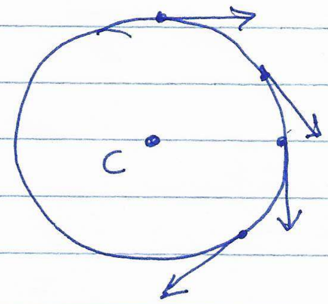
In un sistema $C x' z'$ in rotazione con il sistema si ha

$$\vec{P} = 2m\omega d^2 \sin^2\theta\, \vec{k}' + \underbrace{2m\omega d^2 \sin\theta\cos\theta\, \vec{z}'}_{\vec{P}_\perp}$$

Il secondo termine ruota con il sistema (x') e si annulla per $\theta = \pi/2$ in cui l'asse di rotazione è asse di simmetria.

Se $\theta = 0$ si annulla l'intero momento angolare

Moti rotatori con asse variabili : la ruota



Nel Rif. del c.d.m. tutti i punti si muovono con vel angolare $\vec{\omega}$

Le velocità sono date da

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)$$

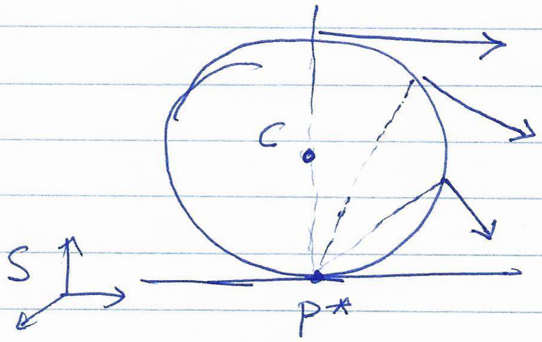
(se gli assi si mantengono // a se stessi)

Il c.d.m. si muove rispetto ad S con vel $\vec{V}_c$

Sovrapposizione di moto traslatorio e rotatorio

$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)$$

Moto di puro rotolamento se la vel. del punto di contatto $\vec{V}^* = 0$.



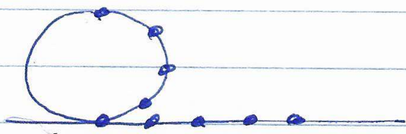
Nel punto P^* di contatto istantaneo $\vec{v} = 0$

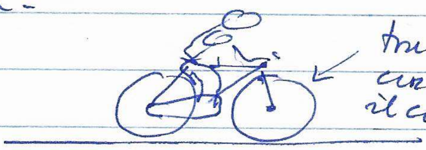
$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r}^*)$$

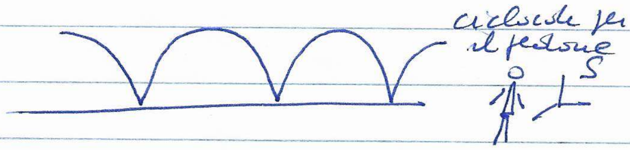
$$v_c = \omega R \quad e \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}^*)$$

questa espressione è valida per un moto attorno ad un asse $\parallel \vec{\omega}$ e passante per P^* (mobile)

Asse di istantanea rotazione che passa per il punto di contatto tra ruota e strada.







Le traiettorie dei punti della ruota sono diverse per sistemi di Rif. diversi.

Per la q.d.m. $\vec{Q} = M\vec{V}_c$

Mentre per il momento angolare, anche quando l'asse di rotazione non è fisso.

$$\vec{P} = I\vec{\omega} + \vec{P}_\perp$$

usando come polo il punto di contatto P^*

Momento di inerzia I

I : grandezza scalare estensiva che può essere calcolata come somma delle parti.
Sia rispetto a un punto e rispetto ad un piano.

$$[I] = [ML^2T^0] \qquad Kg\,m^2$$

(*) Il momento di inerzia gioca per le rotazioni un ruolo analogo alla massa inerziale nei moti traslatori.
Analogamente al c.d.m. per un sistema continuo

$$I = \int \rho^2 dm \quad \text{utile per calcoli concreti}$$

Il m.d.i. dipende dall'asse. Se ci si allontana dal c.d.m I aumenta.

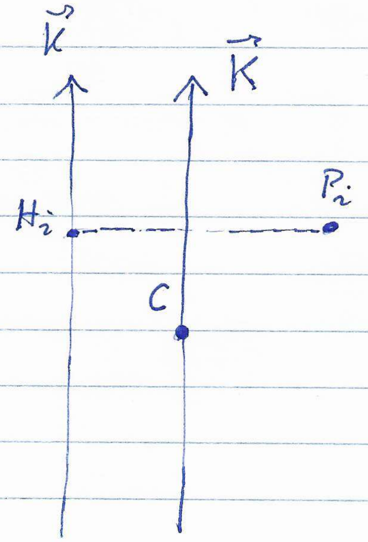
Teorema di Huygens-Steiner

Relazione tra i m.d.i. per assi paralleli.

Il m.d.i. rispetto ad una retta qualsiasi è dato da due termini:
(i) M.d.i. per una retta // alla prima passante per il c.d.m.
(ii) md^2; d = distanza tra gli assi

$$I = I_c + md^2$$

Utilità pratica perché il calcolo di I_c è spesso semplice per simmetrie varie.
Consideriamo un sistema di punti ed una retta che non passa per il c.d.m. → asse z
Asse x passa per il c.d.m. e y di conseguenza.



Il punto generico di massa m_i ha coordinate $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$

La perpendicolare sull'asse $\vec{k}$ (z)

$H_i \equiv (0, 0, z_i)$

$\overline{P_i H_i}^2 = x_i^2 + y_i^2$

Il m.d.i. rispetto a z è dato da

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

In un Rif. CXYZ, con origine nel c.d.m. e assi X, Y, Z // x, y, z si ha

$$x_i = X_i + d \qquad y_i = Y_i \qquad z_i = Z_i$$

Si può scrivere

$$I = \sum_i m_i [(X_i + d)^2 + Y_i^2] = \sum_i m_i (X^2 + Y^2) + \sum_i m_i d^2 + 2d \sum_i m_i X_i$$

momento di inerzia rispetto all'asse Z

massa totale per il quadrato della distanza tra gli assi z e Z.

Il terzo termine è nullo in quanto

$$\sum_i m_i X_i = X_{i,C} = 0$$

Nel caso di momenti di inerzia tra assi // ma nessuno dei due passanti per il c.d.m

$$I_1 = I_C + m d_1^2 \quad ; \quad I_2 = I_C + m d_2^2$$

$$I_1 - I_2 = m(d_1^2 - d_2^2)$$

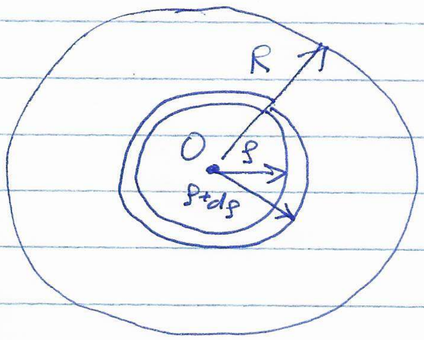
Nel caso dei sistemi piani (x, y) si ha

$$I_z = I_x + I_y$$

$P_i \equiv (x_i, y_i, 0)$; $I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

$I_x = \sum_i m_i y_i^2$ e $I_y = \sum_i m_i x_i^2 \longrightarrow I_z = I_x + I_y$

Esempio: Disco omogeneo rispetto ad un asse $\perp$ che passa per O –



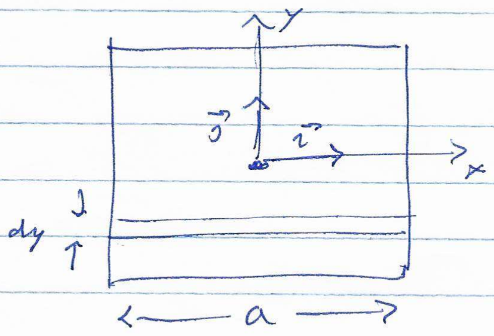
$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$dm = \sigma\, dS = 2\pi\sigma\cancel{\pi}\rho\, d\rho$$

$$I = \int_0^R 2\pi\sigma\rho^3 d\rho = 2\pi\sigma \int_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{\sigma\pi R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

Lamina piana quadrata (NB: rispetto all'asse x)



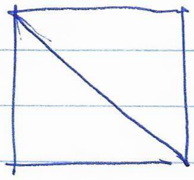
$\sigma = \frac{m}{a^2}$ $\quad dS = a\,dy$

$$dm = \sigma\, dS = \sigma a\, dy$$

$$dI = y^2 dm = \sigma a y^2 dy$$

$$I = \int_{-a/2}^{+a/2} \sigma a y^2 dy =$$

$$= \frac{\sigma a}{3}\left[\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{a^3}{8}\right)\right] = \frac{1}{12}\sigma a^4 = \frac{1}{12} m a^2$$



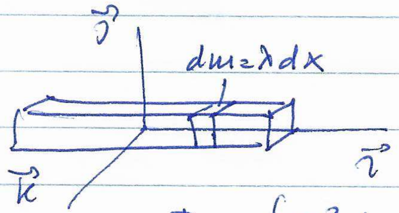
Lamina quadrata rispetto alla diagonale

I_d sono uguali per le due diagonali

$I_z = \cancel{I_x + I_y}$ $I_{d_1} + I_{d_2} = I_x + I_y$

$$I_z = 2 I_x = 2 \frac{1}{12} m a^2 \rightarrow I_d = \frac{m a^2}{12}$$

Asticella omogenea



$\lambda = \frac{m}{l}$ $\quad dm = \lambda dx$

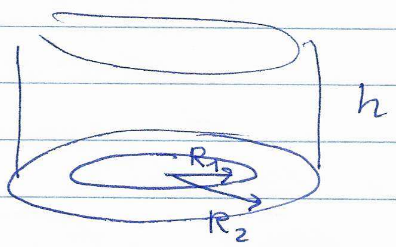
$$dI_c = x^2 dm = \lambda x^2 dx$$

$$I_c = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 dx = \lambda \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m l^2$$

Poi per un asse passante all'estremità della barretta
Teorema di H.S.

$$I = I_c = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Cilindro cavo all'interno $\quad h, r_1, r_2$



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi h (r_2^2 - r_1^2)}$$

$$dV = 2\pi r h dr \; ; \; dm = \rho dV = 2\pi \rho r h dr$$

$$dI = r^2 dm = 2\pi \rho r^3 h dr$$

$$I = \int dI = \int 2\pi \rho r^3 h dr = 2\pi \rho h \int r^3 dr$$

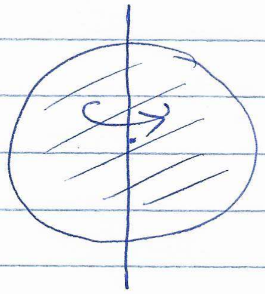
$$\int_{r_1}^{r_2} \rightarrow I = \frac{\pi \rho h}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2)$$

Per un cilindro pieno $r_2 = R$ $r_1 = 0$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

Attenzione - la formula del ~~cil~~ cilindro cavo può apparire strana ma va considerato che m è costante fissa, se r_1 ed r_2 sono vicini questa massa è distribuita più verso l'esterno -

---

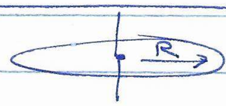
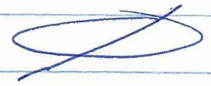
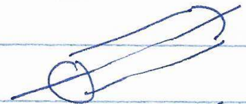
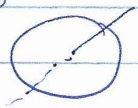
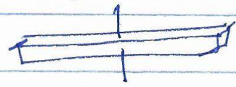
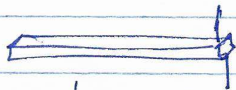
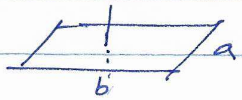
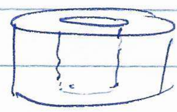


Disco di raggio r rispetto ad un asse // diametro

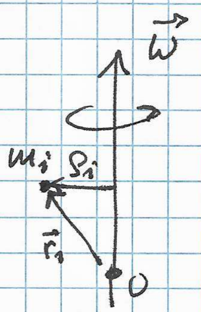
Il momento di I. rispetto ad un asse ⊥ che passa per il centro è $\frac{1}{2} m r^2$

Che può essere considerato la somma di due momenti di inerzia di assi ⊥

$\rightarrow I = \frac{1}{4} m r^2$

Disco sottile R rispetto ad asse ⊥	$\frac{1}{2} m R^2$	
Disco sottile rispetto a diametro	$\frac{1}{4} m R^2$	
Cilindro rispetto all'asse	$\frac{1}{2} m R^2$	
Sfera rispetto all'asse	$\frac{2}{5} m R^2$	
Asticella rispetto ad asse per il centro	$\frac{1}{2} m l^2$	
Asticella rispetto ad asse per un estremo	$\frac{1}{3} m l^2$	
Lastra rispetto ad asse perpendicolare	$\frac{1}{12} m(a^2+b^2)$	
Cilindro cavo rispetto all'asse di simmetria	$\frac{1}{2} m(R_1^2+R_2^2)$	

03/05/2016



FORZE VINCOLARI E ROTAZIONI

$$\vec{P}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i =$$
$$= \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Sistema rigido

Momento angolare

$$\vec{P} = \vec{P}_{/\!/} + \vec{P}_\perp$$

$$\vec{r}_i = z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i \quad (\vec{\rho}_i \perp \omega)$$

$$\vec{P} = \sum_i (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i [\vec{\omega} \times (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i)] = \vec{P}_{/\!/} + \vec{P}_\perp$$

$\vec{k} \times \vec{\omega} = 0$

$$\vec{P} = \sum_i (z_i \vec{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) =$$
$$= \sum_i m_i z_i \vec{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} =$$
$$= -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i + \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{P}_{/\!/} = \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} \qquad \rho_i = |\vec{\rho}_i|$$
$$= I \vec{\omega} \qquad \boxed{I = \sum_i m_i \rho_i^2}$$

$$\boxed{\vec{P}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i}$$ → importante per la meccanica - ridurre le vibrazioni e gli sforzi.

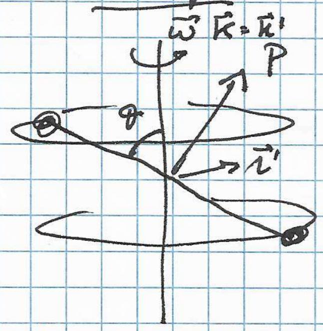
Dipende dalla posizione di O sull'asse e si annulla se questo è un asse di simmetria

Per un corpo rigido si può definire una terna di assi ortogonali (assi principali di inerzia) per cui $\vec{P}_\perp = 0$

Quando il punto è il c.d.m. → assi centrali di inerzia

Effetto di $\vec{P}_\perp$: se l'asse di rotazione fosse flessibile tende a distorcerlo

Esempi



$$\vec{P} = 2 m \omega d^2 \sin^2\theta \, \vec{k}' +$$
$$\underbrace{+ 2 m \omega d^2 \sin\theta \cos\theta \, \vec{i}'}_{\vec{P}_\perp}$$

$\vec{P}_\perp$ cambia direzione nel tempo (ruota)

$$\vec{P} = 2m\omega d^2 \sin^2\theta \,\vec{x}' + 2m\omega d^2 \sin\theta\cos\theta\,\vec{z}'$$

$$|\vec{P}| = 2m\omega d^2 \sqrt{\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta} =$$

$$= 2m\omega d^2 \sin\theta \sqrt{\sin^2 + \cos^2}$$