$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$c = ab \sin\theta$ $\qquad\qquad$ $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\boxed{\vec{X} \times \vec{W} = \vec{V}}$$

$$\boxed{\vec{X}_0 = \frac{\vec{W} \times \vec{V}}{W^2}}$$

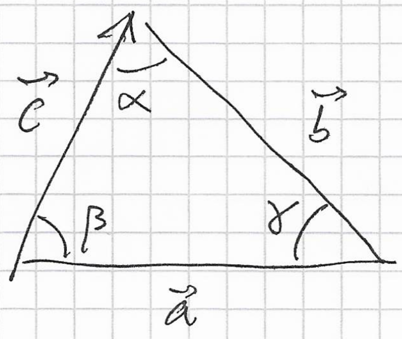
$\perp$ $\vec{w}$ e $\vec{v}$ $\qquad x_0 = \underline{v \cdot w \sin\theta}$

$$(\vec{X}_0 \times \vec{W}) = \left(\frac{\vec{W} \times \vec{V}}{W^2}\right) \times \vec{W}$$

$$(\vec{u})\ \frac{w \cdot v \sin\theta}{w^2} \times \vec{W} \quad \underline{v}$$

<u>Regola di Einstein.</u>

Legge dei seni



$$\vec c = \vec a + \vec b$$

$$\vec a \times \vec c = \vec a \times \vec a + \vec a \times \vec b = \vec a \times \vec b$$

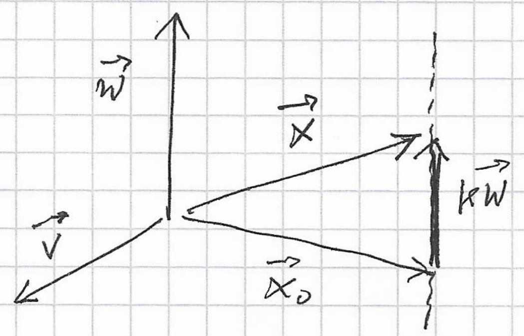
$$\underline{ac \sin\beta} = \underline{ab \sin(\pi-\gamma)} = \underline{ab \sin\gamma}$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Divisione vettoriale

Dati due vettori $\vec w$ e $\vec v$, ortogonali, trovare $\vec x$ tale che

$$\vec x \times \vec w = \vec v$$



Prima soluzione

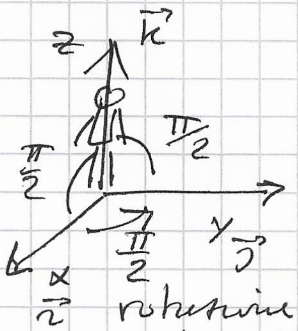
$$\vec x_0 = \frac{\vec w \times \vec v}{w^2} \rightarrow$$ ($\vec x_0 \times \vec v$ è ⊥ a $\vec v$ e $\vec w$)?

$$\cancel{\frac{\vec w \times \vec w \times \vec v}{w^2}} = \vec v \quad \text{OK}$$

ma posso sempre aggiungere $k\vec w$ (k reale)

$$\vec x = \frac{\vec w \times \vec v}{w^2} + k\vec w$$

Rappresentazione Cartesiana Ortogonale



rotazione antioraria

rette x, y, z versori $\vec i, \vec j, \vec k$

Terna cartesiana ortogonale

Dato che $\vec i, \vec j, \vec k$ sono tra loro ⊥

$$\vec i \cdot \vec j = \vec j \cdot \vec k = \vec k \cdot \vec i = 0$$

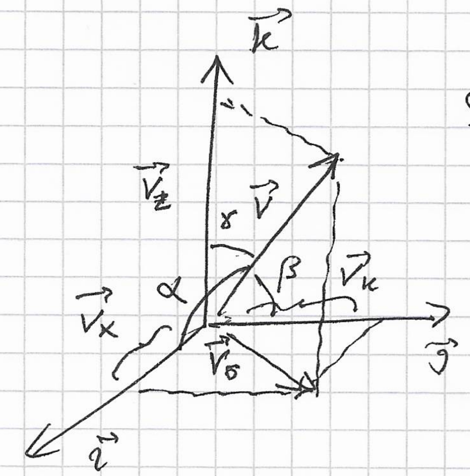
$$\vec i \vec i = \vec j \vec j = \vec k \vec k = 1$$

$$\vec i \times \vec j = \vec k \quad \vec j \times \vec k = \vec i \quad \vec k \times \vec i = \vec j$$

$$\vec i \times \vec i = \vec j \times \vec j = \vec k \times \vec k = 0$$

Se i due versori coincidono $\vec{i}\times\vec{i}=0$ $\quad \sin\theta=0$

Altrimenti $\sin\theta=1$ il modulo del prodotto vettoriale è unitario → versore



Scomposizione lungo gli assi cartesiani

Prima scomponiamo $\vec{V}$ nei due vettori $\vec{V}_z$ e $\vec{V}_\sigma$ tra loro ortogonali

Poi scomponiamo $\vec{V}_\sigma = \vec{V}_x + \vec{V}_z$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z =$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

da cui

$$\begin{cases} v_x = \vec{V}\cdot\vec{i} = v\cos\alpha \\ v_y = \vec{V}\cdot\vec{j} = v\cos\beta \\ v_z = \vec{V}\cdot\vec{k} = v\cos\gamma \end{cases}$$

<u>Componenti cartesiane di un vettore</u>

Equivalenza tra rappresentazioni

Dalle componenti cartesiane (Pitagora)

$$v^2 = v_\sigma^2 + v_z^2 = (v_x^2 + v_y^2) + v_z^2$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

La direzione corrisponde al versore $\vec{u}_v = \dfrac{\vec{V}}{v}$

$$\vec{u}_v = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

e quindi

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

e quindi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Dato $\vec{a} \equiv (2,-1,1)$ determinare le componenti del versore di a

$$a = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad ; \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Rappresentazione → 3 grandezze

Cartesiana : 3 componenti

Altra : modulo e due grandezze angolari (direzione e verso)

02/03/2018

Espressioni cartesiane

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$$

$$\vec{v}+\vec{w} = (v_x+w_x)\vec{i} + (v_y+w_y)\vec{j} + (v_z+w_z)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{w} \longrightarrow v_x = w_x \quad v_y = w_y \quad v_z = w_z$$

$$\lambda\vec{v} = \lambda v_x\vec{i} + \lambda v_y\vec{j} + \lambda w_z\vec{k}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Espressione cartesiana del prodotto vettoriale

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + $$
$$+ (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

Infatti

$$\vec{v}\times\vec{w} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \times (w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) =$$

$$= (v_x w_y)(\vec{i}\times\vec{j}) + (v_x w_z)(\vec{i}\times\vec{k}) + (v_y w_x)(\vec{j}\times\vec{i}) +$$

$$+ (v_y w_z)(\vec{j}\times\vec{k}) + (v_z w_x)(\vec{k}\times\vec{i}) + (v_z w_y)(\vec{k}\times\vec{j}) =$$

$$\left[\ \vec{i}\times\vec{j} = k \ ; \ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \ ; \ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}\ \right]$$

$$= (v_y w_z - v_z w_y)\,\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\,\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\,\vec{k}$$

Che simbolicamente si può scrivere come un determinante

$$\begin{vmatrix} - \\ - \\ - \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \qquad \checkmark$$

Analogamente per il prodotto scalare

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) =$$

$$= (v_x w_x)(\vec{i}\cdot\vec{i}) + (v_y w_y)(\vec{j}\cdot\vec{j}) + (v_z w_z)(\vec{k}\cdot\vec{k}).$$

Condizioni perché due vettori siano //

Prodotto vettoriale $= \emptyset$

$$(a_y b_z - a_z b_y) = (a_z b_x - a_x b_z) = (a_x b_y - a_y b_x) = 0$$

quindi $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

Le componenti di vettori // sono proporzionali

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{se righe proporzionali}$$

Dati $\vec{a} = (2; -3; 1)$ e $\vec{b} = (1, -1, 2)$

trovare la direzione della retta $\perp$ al piano σ di $(\vec{a}; \vec{b})$

Il prodotto vettoriale ha questa proprietà

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$C \equiv (-5; -3, 1) \qquad C = \sqrt{35}$

Coseni direttori

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{35}}\ ; \quad \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{35}}\ ; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

Derivazioni di vettori

Def $w(t)$ $\quad t$ = tempo o altro

Generalizzando il concetto di limite delle variabili scalari alle funzioni vettoriali

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{w}(t+\Delta t) - \vec{w}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t}$$

Utilizzando coordinate cartesiane i cui versori non dipendono da t

$$\vec{w}(t) = w_x(t)\,\vec{i} + w_y(t)\,\vec{j} + w_z(t)\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_x(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dw_y(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dw_z(t)}{dt}\,\vec{k}$$

Si può quindi dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{w}(t) + \vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\,\vec{w}(t)\right] = \frac{d\lambda(t)}{dt}\,\vec{w}(t) + \lambda(t)\,\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{w}(t)\,\vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{w}(t)}{dt}\,\vec{v}(t) + \vec{w}(t)\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{w}(t) \times \vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \times \vec{v}(t) + \vec{w}(t) \times \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Nel caso di funzione composta

$$\vec{w}(t) = \vec{w}(s(t)) \qquad \frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw(s)}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

* Caso importante in cui il modulo è costante (rotazione)

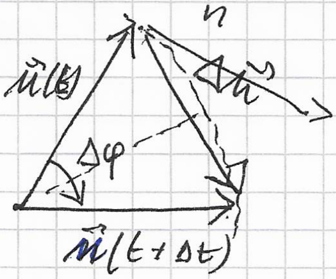
$$\vec{w}(t)\,\vec{w}(t) = w^2 = cost$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left[\vec{w}(t)\cdot\vec{w}(t)\right] = 2\,\frac{d\vec{w}(t)}{dt}\cdot\vec{w}(t) = 0$$

per cui $\frac{d\vec{w}}{dt} \perp \vec{w}$

Derivata di versori e vettori

$$\vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}$$



$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

$$|\Delta\vec{u}| = 2u\sin(\Delta\varphi/2)$$

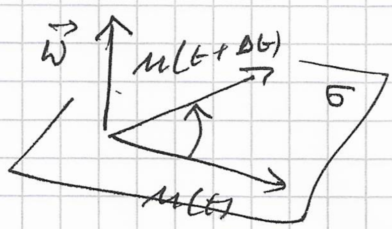
$$\frac{|\Delta\vec{u}|}{t} = \frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\Delta t\to 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta\varphi = 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$$ $\vec{n}$ = versore nel piano σ ⊥ $\vec{u}$

* Per una rotazione possiamo definire $\vec{\omega}$ che ha modulo $\frac{d\varphi}{dt}$; ⊥ σ e verso tale da vedere la rotazione come antioraria



Il versore di $\vec\omega$ è il prodotto vettoriale tra $\vec{u}$ e $\vec{n}$

Si può dimostrare per la derivata di un versore

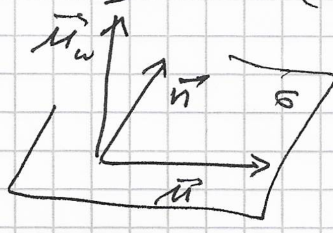
$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n} = \vec{\omega}\times\vec{u}}$$

dimostrazione

Sia u_ω il versore di $\vec\omega$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\omega \qquad \vec{u}_\omega = \vec{u}\times\vec{n}$$

I versori $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{u}_\omega)$ costituiscono una terna ortogonale (destra)



$$\vec{u}_\omega\times\vec{u} = \vec{n}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{u} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_\omega\times\vec{u} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{n} = \frac{d\vec{n}}{dt}\left(\leftarrow\frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

e anche $\vec{u}\times(\dots) \longrightarrow \vec{\omega} = \vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt}$

moltiplicando tutto vettorialmente $u\times\cdots$

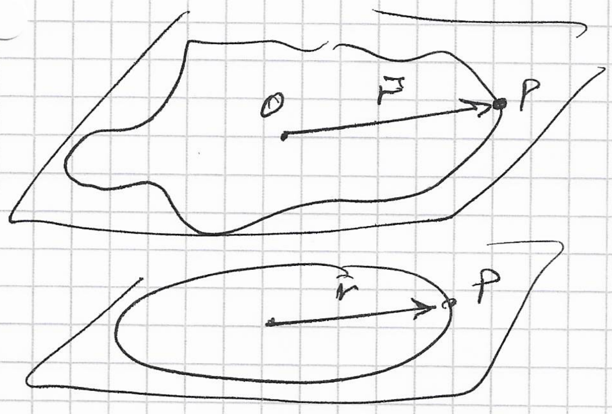
✓

Per un generico vettore

$$\frac{d\vec w}{dt} = \frac{d}{dt}(w\,\vec u_w) = \frac{dw}{dt}\vec u_w + w\frac{d\vec u_w}{dt} =$$

$$= \frac{dw}{dt}\vec u_w + w\,\vec\omega\times\vec u_w$$

$$\frac{d\vec w}{dt} = \underbrace{\frac{dw}{dt}\vec u_w}_{\text{variazione del modulo}} + \underbrace{\vec\omega\times\vec w}_{\text{variazione orientamento}}$$



Moto su una curva chiusa piana

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec u_r + \vec\omega\times\vec r$$

per un cerchio

$$\frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\times\vec r$$

03/03/2016

Momento di un vettore applicato

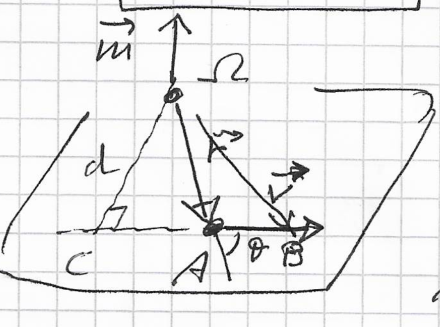
Per la forza e quantità di moto è importante il punto di applicazione

Momento del vettore $\vec v$ applicato in A, rispetto ad un punto Ω (polo) il vettore libero $\vec m$

$\boxed{\vec m = \vec r\times\vec v}$ con $\vec r = \vec{\Omega A}$

è $\perp$ al piano di $\vec r$ e $\vec v$

ed ha modulo $m = r v \sin\theta$



Se cambio A in B

$$\vec m = \vec{\Omega B}\times\vec v = (\vec{\Omega A}+\vec{AB})\times\vec v = \vec{\Omega A}\times\vec v = \vec m$$

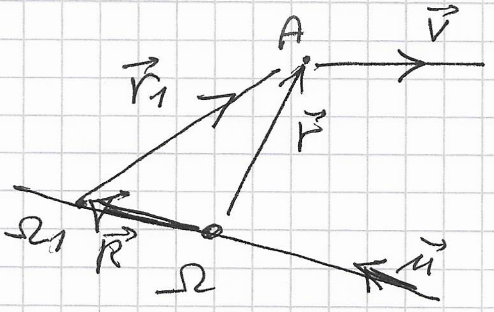
Momento assiale rispetto ad un asse di versore $\vec{u}$

la quantità scalare

$$m_u = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

con $\vec{r} = \vec{\Omega A}$

è la proiezione ortogonale del momento vettoriale rispetto a Ω sulla direzione orientata di $\vec{u}$



$\Omega \to \Omega_1$

$$m_u(\Omega_1) = (\vec{r}_1 \times \vec{v}) \cdot \vec{u} =$$

$$= (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{R} \times \vec{v}) \vec{u} =$$

$$= (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = m_u(\Omega)$$

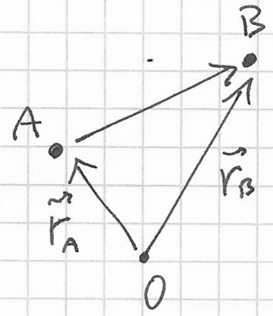
in quanto $\vec{R} = \vec{\Omega\Omega_1} \parallel \vec{u}$

NB: se $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sono sullo stesso piano $m \to 0$ -

Vettore posizione

$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{\Delta r}$$



Distanza tra due punti

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$$

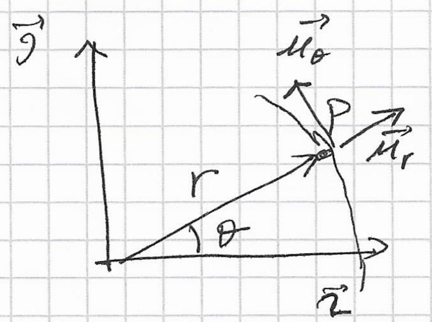
$\vec{AB}$ è la differenza tra questi vettori

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$d = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Coordinate polari piane

Origine O (polo) + asse polare = semiretta orientata da O



$P \rightarrow (r, \theta)$

↑ scalari

$\vec{u}_\theta$ orientato per angoli crescenti

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

Se $\vec{i}$ è l'asse polare

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = (\vec{u}_r\cdot\vec{i})\cdot\vec{i} + (\vec{u}_r\cdot\vec{j})\cdot\vec{j} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = (\vec{u}_\theta\cdot\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{u}_\theta\cdot\vec{j})\cdot\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r.$$

Possiamo utilizzare versori che non dipendono da θ

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta \\[2ex] \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{u}_r \end{cases}$$