DINAMICA DEI SISTEMI

Punto materiale → sistemi di punti interagenti (in modo molto semplice - spesso rigidi) → solidi

Centro di massa

Forze interne ed esterne

Quantità di moto e momento angolare

Conservazione quantità di moto e momento angolare

(Estensione del Terzo Principio) -

Lavoro - en. cinetica - Forze vive -

Vari tipi di forze e di energie - interne - esterne etc

Sistemi di due punti

Fenomeni di urto e leggi di conservazione -

Sistemi estesi - dimensioni lineari finite ≠ punto -

Leggi del moto e principi della dinamica - estensione -

Modello: caratteristiche continue - materia con densità uniforme

In realtà: molecole - atomi - elettroni - ~~[illegible]~~ nuclei - disordine

A livello microscopico lo spazio è essenzialmente vuoto.

Punti materiali molto piccoli e $N \sim 10^{23}$

Dualismo continuo - discreto -

Centro di massa

Sistemi discreti m_i, r_i

Centro di massa C: punto geometrico individuato dal vettore

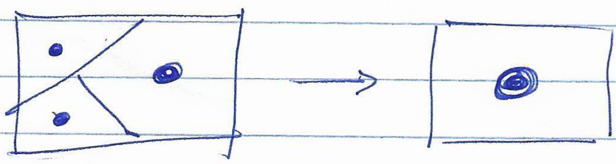
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{massa totale.}$$

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_i^n m_i x_i \quad ; \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_i^n m_i y_i \quad ; \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Proprietà distributiva del centro di massa:

Dividendo il sistema in sottosistemi, e ciascuno è sostituito dal suo centro di massa queste possono essere usate per definire il centro di massa dell'intero sistema



Esempio: dividiamo il sistema in due sottosistemi

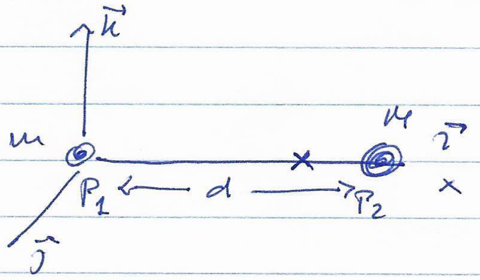
primo $i = 1 \dots j$; secondo: rimanenti

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^{j} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=j+1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{j} m_i + \sum_{i=j+1}^{n} m_i} = \frac{M_1 \vec{r}_{C_1} + M_2 \vec{r}_{C_2}}{M_1 + M_2}$$

In generale si può considerare la divisione in più sottosistemi

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_s M_s \vec{r}_{C_s}}{\sum_s M_s}$$

C.d.M di due masse m e $M = \alpha m$



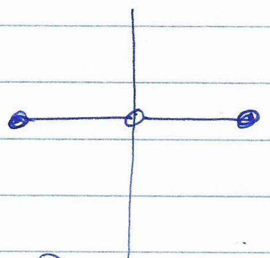
$P_1 \equiv (0,0,0)$; $P_2 \equiv (d,0,0)$

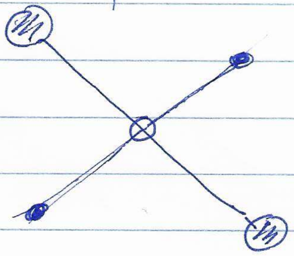
si trova $C \equiv \left(\frac{\alpha d}{1+\alpha}, 0, 0\right)$ no m

Se $m = M$ il CdM è al centro.

Non dipende dai valori assoluti delle masse ma solo dai loro rapporti e posizioni

Asse di simmetria: retta tale che per ogni massa m $\exists$ una seconda uguale e alla stessa distanza sulla $\perp$ del punto all'asse. Il C.d.M. si troverà su questo asse. Nel caso di più assi di simmetria sarà nel punto di incontro. Scomponendo il sistema a coppie di masse uguali il CdM di ogni coppia sarà sull'asse





NB: Il CdM in generale NON coincide con un punto del sistema

Sistemi continui

Suddividiamo in N sottosistemi di massa Δm_i, se piccoli $\approx$ punti forma

$$\vec{r}_C \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i$$

Nel limite $N \to \infty$ i sottosistemi sono molto piccoli e quindi

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad \begin{cases} x_C = \frac{1}{M}\int x\, dm \\ y_C = \frac{1}{M}\int y\, dm \\ z_C = \frac{1}{M}\int z\, dm \end{cases}$$

- Il passaggio ~~d~~ al discreto-continuo si applica a qualunque grandezza fisica definita da un sistema di punti.
- Nel limite $\Delta m_i \to dm$ e $\int$ è nel volume del sistema il limite è empirico. ~~dm~~ dV_i - dm_i abbastanza piccolo ma non troppo per entrare gli atomi.
- Il CdM in genere non coincide con un punto del sistema

Assunzioni di omogeneità e introduzione della densità volumetrica media

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad [\rho_m] = [M L^{-3} T^0]$$

Localmente densità volumetrica di massa

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Nel caso di ~~un~~ una superficie o di una linea

densità superficiale: $\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}$

densità lineare $\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}$

$$dm = \rho\, dV \quad ; \quad dm = \sigma\, dS \quad ; \quad dm = \lambda\, dl$$

e gli integrali corrispondenti sono ~~su~~ volume, superficie, linea.

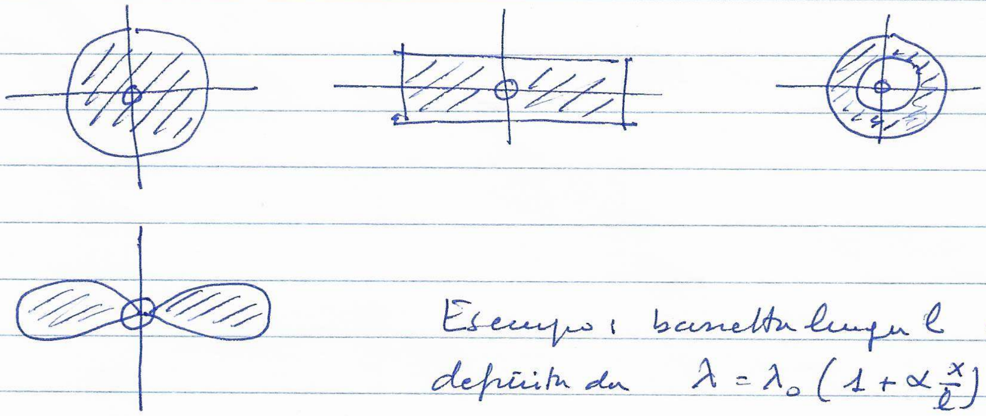
Se il sistema è omogeneo ρ, σ e λ sono indip. da $\vec{r}$

e r_C dipende solo dalla forma del sistema

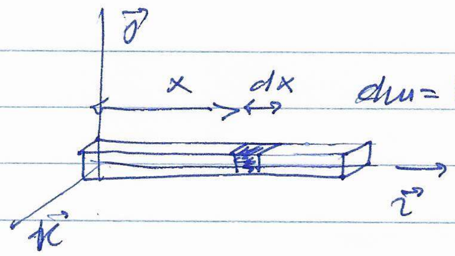
$$r_C = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int \vec{r}\, dV}{\int dV} = \frac{1}{V} \int \vec{r}\, dV$$

Analogamente in 2d e 1d.

Le relazioni di simmetria valgono anche per i sistemi omogenei.



Esempio: barretta lunga l con densità definita da $\lambda = \lambda_0 \left(1+\alpha \frac{x}{l}\right)$

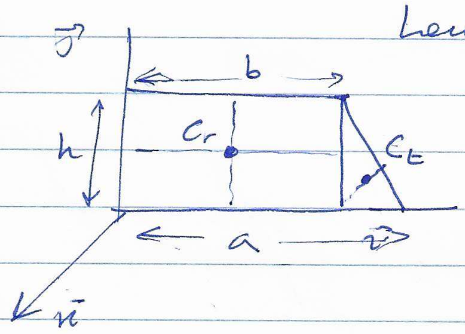


$$dm = \lambda dx = \lambda_0 \left(1+\alpha \frac{x}{l}\right) dx$$

$$M = \int dm = \int_0^l \lambda_0 \left(1+\alpha \frac{x}{l}\right) dx = l \lambda_0 \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int \lambda_0 x \left(1+\alpha\frac{x}{l}\right) dx = l \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{3}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Lamina sottile omogenea



C.d.M del rettangolo $C_r \equiv \left(\frac{b}{2}; \frac{h}{2}, 0\right)$ e per il triangolo $C_t \equiv \left(b+\frac{(a-b)}{3}; \frac{h}{3}; 0\right)$

[verificare $x_c = \frac{1}{m}\int x\, dm$] — $\rho_t = \lambda(1-x)$ etc.

$$m_r = \sigma b h \quad ; \quad m_t = \sigma \frac{(a-b)h}{2}$$

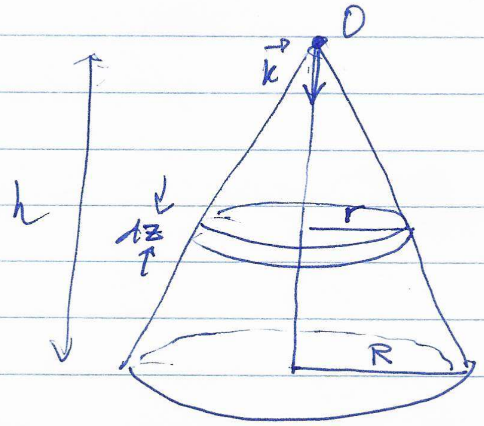
e quindi $x_c = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3(b+a)}$ $\quad y_c = h \dfrac{2b+a}{3(b+a)}$

Controlliamo il risultato con casi limite semplici

per $a=b$ → C_M del rettangolo

per $b=0$ → - - - triangolo

Centro di massa di un cono circolare



Invarianza per rotazioni intorno all'asse
→ C_M è in questo asse

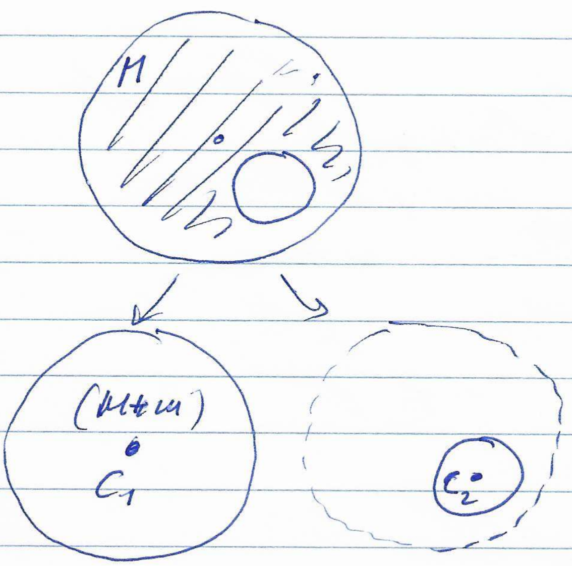
$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \rightarrow r = R\frac{z}{h}$$

$$dm = \rho \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

$$z_c = \frac{\int z\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^h z\left(\rho\pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz\right)}{\int_0^h \rho\pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz} = \frac{\int_0^h z^3 dz}{\int_0^h z^2 dz} = \frac{3}{4}h$$

Lamina sottile omogenea di raggio R e massa M
con un foro circolare decentrato di raggio r



Due sottosistemi : $\underbrace{\text{disco pieno + foro}}$

massa negativa

$$x_{C_1} = \frac{M x_{C_1} + m x_{C_2}}{M+m} =$$

$$= \frac{(M+m)x_{C_1} - m x_{C_2}}{M}$$

$$m = \rho\pi r^2 = \frac{M r^2}{R^2 - r^2}$$

Quantità di moto e moto del centro di massa

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \text{(generalizzazione naturale)}$$

$$\vec{Q} = \int \vec{v}\, dm$$

Moto del centro di massa

derivando su dt $\rightarrow$ $\vec{V}_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$

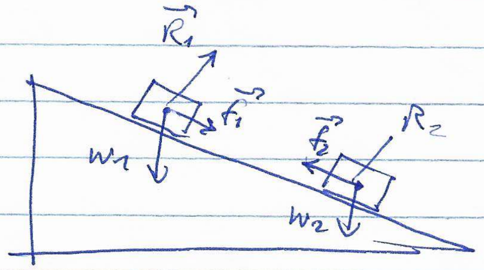
$$\rightarrow \quad \vec{Q} = M \vec{V}_C$$

* Rispetto alla quantità di moto il sistema può essere trattato come un punto nel centro di massa con massa pari alla massa totale - Primo teorema del centro di massa

Q. di moto è estensiva $\rightarrow$ $\propto$ alla massa totale -

Variazione Q.d.m. $\longleftrightarrow$ forze

Forze interne e forze esterne



p.e. due corpi si attraggono su un piano inclinato + gravità -

$\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ forze interne

tutte le altre sono esterne

Per ogni punto P_i del sistema si possono distinguere $f_i^{(int)}$ e $f_i^{(ext)}$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{q}_i\right) = \sum_i \frac{d\vec{q}_i}{dt}$$ somma su tutti i punti del sistema

Se velocità e q.d.m. sono rispetto ad un rif. inerziale per il II° principio della dinamica $\frac{dq}{dt} \leftrightarrow \vec{F}$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i = \underbrace{\sum_i \vec{f}_i^{(int)}}_{=0} + \sum_i \vec{f}_i^{(est)}$$

$f_{i(j)}$ = forza che i esercita su j

ma per azione e reazione

$$\vec{f}_{i(j)} = -\vec{f}_{j(i)}$$

per cui $\vec{F}^{(int)} = \sum_i \vec{f}_i^{(int)} = \sum_{i,j\neq i} \vec{f}_{i(j)} = 0$

da cui:

$$\boxed{\vec{F}^{(ext)} = \sum_i \vec{f}_i^{(est)} = \frac{dQ}{dt}}$$

Prima equazione della dinamica dei sistemi di punti materiali

Valida nei sistemi inerziali

Solo forze esterne → per lo studio di $Q(t)$ possiamo ignorare le forze interne.

Per i sistemi non-inerziali vanno incluse anche le forze inerziali.

Generalizzazione del teorema dell'impulso

$$\Delta\vec{Q} = \int_{\Delta t} \vec{F}^{(est)} dt \quad ; \quad \vec{F}^{(est)} = \frac{d(M\vec{v}_c)}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}^{(est)} = M\vec{a}_c}$$ Teorema del moto del centro di massa

secondo teorema del c.d.m.

Il c.d.m. di un sistema si muove come un punto materiale nel quale sia l'intera massa e sul quale agisca il risultante delle forze esterne. Giustifica il concetto di punto materiale.

12/04/2016

Esempio: due particelle connesse da una molla su un piano liscio

Il C.d.M. è inizialmente fermo e la molla è compressa

Lasciando la molla il sistema oscilla e trasforma en. pot. della molla in en. cinetica delle particelle

Ma queste sono forze interne e $\vec{F}^{(est)} = 0$ quindi il c.d.m. rimane fermo.

Anche un corpo lanciato in aria ruota e trasla.

Ma il c.d.m. si muove come una particella soggetta solo al peso - parabola.

Moto del c.d.m. $\rightarrow$ aspetto traslatorio del moto

Cadendo si ammortizza l'impatto dei piedi sul terreno ammortizzando l'urto piegando le gambe

$\vec{F}^{(est)} \simeq F_s \leftarrow$ azione del suolo sul corpo

$$J = \int_{\Delta t} F^{(est)} dt = \Delta \vec{Q} = -\vec{Q}_1$$

$$J = \underset{\uparrow \text{ valor medio}}{F_{sm}} \Delta t$$

J è fissato, per ridurre F_{sm} si deve aumentare Δt piegando le gambe e allungando il percorso del c.d.m.

Se corpo rigido $\Delta l \simeq 1\,cm$ (elasticità vertebre)

Piegando le gambe $\Delta l \simeq 50\,cm$

F_{sm} viene così ridotta di un fattore 50.

Altri esempi: martello rispetto a mano nuda

Air bag e cinture varie

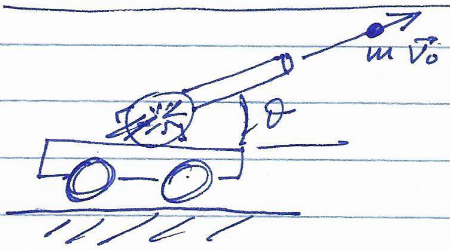
Abitacolo rigido ma parti anteriori e posteriori cedevoli per assorbire le variazioni di q.d.m.

Conservazione della quantità di moto

Sistema isolato non interagente $\sum f_i = 0$

$\vec{Q}$ = costante la q.d.m. si conserva.

Importanti implicazioni per le forze interne.
Fucile + proiettile $m + M$ inizialmente fermi
Dopo lo sparo
$$m\vec{v} + M\vec{V} = 0$$



Cannoncino di massa M
Moto del cannoncino dopo dopo lo sparo

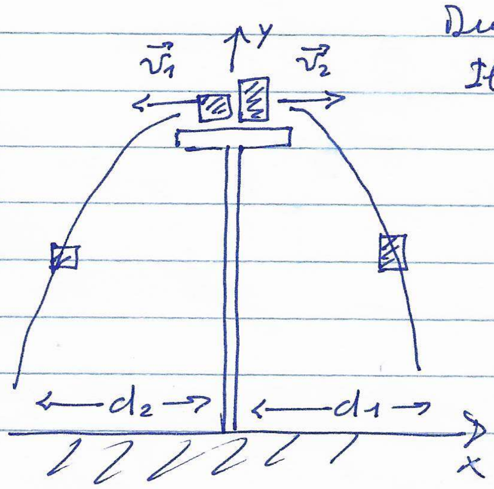
$F_x^{(e)} = 0 \rightarrow Q_x$ = costante

(t_i e t_f) Sistema isolato nella direzione x. $F_x^{(e)} = 0$.
v_0 = vel. del proiettile rispetto al cannoncino

$$Q_x(t_f) = m(V_x + v_{0x}) + MV_x = Q_x(t_i) = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$V_x = -\frac{m v_0 \cos\theta}{M + m}$$



Due corpi su un sostegno
Il centro di massa è soggetto alla forza
$\vec{F}^{(e)} = (m_1 + m_2)\vec{g}$

$F_x^{(e)} = 0$; $F_y^{(e)} = -(m_1 + m_2) g$; $F_z^{(e)} = 0$

L'ascissa del c.d.m. non cambia

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$

La ~~cosa~~ componente orizzontale delle forze è nulla
→ conservazione di Q_x.

$$m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} = 0 \quad \text{in ogni istante}$$

dato che il moto è uniforme v_{x1} e v_{x2} sono costanti
quindi $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$

Quindi i due corpi cadranno a terra a distanze

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

~~Pattinatore~~ Persona sul ghiaccio - perfettamente senza attrito
si toglie una scarpa (o telefonino) e lo lancia

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

Un aliscafo viene ancorato al molo altrimenti la
discesa dei passeggeri provocherebbe uno scostamento.
Aliscafo + passeggeri in totale hanno momento nullo
prima e dopo lo sbarco

Colpo di testa di un calciatore.
Saltando con le gambe racchiuse e poi portandole
verso il basso si ha un abbassamento del c.d.m
rispetto al proprio corpo. Ma dato che in assoluto il c.d.m
non può deviare rispetto alla sua traiettoria, questo
provoca un innalzamento della parte superiore (testa).

Momento angolare di un sistema

Per un sistema di punti il momento angolare totale rispetto ad un polo Ω è la somma dei momenti angolari

$$P_\Omega = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{P}_{i\Omega} \qquad (\vec{r}^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega)$$

Momento angolare è una grandezza estensiva.

Per un continuo $\vec{P} = \int \vec{r}^{\,*} \times d\vec{q}$; $d\vec{q} = \vec{v}\,dm$

In un sistema inerziale relazioni tra la derivata del momento angolare e le forze esterne.

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_{i\Omega} = \sum_i \frac{d\vec{P}_{i\Omega}}{dt} = \sum_i \vec{m}_{i\Omega} - \sum_i \vec{V}_\Omega \times \vec{q}_i =$$

$$= \sum_i \vec{m}_{i\Omega} - \vec{V}_\Omega \times \vec{Q}$$

$$\boxed{P_\Omega = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q}}$$

avendo considerato che

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \vec{m}_\Omega - \vec{V}_\Omega \times \vec{q} \quad ; \quad \boxed{\vec{m}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{f}}$$

momento rispetto al polo Ω

se Ω è fermo $\quad \vec{m}_\Omega = \frac{d\vec{P}_\Omega}{dt}$

OK

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega - M\vec{V}_\Omega \times \vec{V}_c$$

momento risultante di tutte le forze

$$\vec{M}_\Omega = \sum_i \vec{m}_{i\Omega} = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{f}_i$$

$$\vec{M}_\Omega = \vec{M}_\Omega^{(i)} + M_\Omega^{(e)}$$

$= 0$ per il principio di azione e reazione.

i momenti delle forze interne si equilibrano.

$$\vec{M}_\Omega^{(i)} = \sum_{i,j>i} \left(\vec{r}_i^{\,*} \times \vec{f}_{i(j)} + \vec{r}_j^{\,*} \times \vec{f}_{j(i)} \right)$$

$$\vec{f}_{i(j)} = -\vec{f}_{j(i)}$$

$$\vec{M}_\Omega^{(i)} = \sum_{i,j>i} \left(\vec{r}_i^{\,*} - \vec{r}_j^{\,*} \right) \times \vec{f}_{i(j)} = \sum_{i,j>i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{i(j)} = 0$$

in quanto $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{f}_{i(j)}$ – Quindi

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{(e)} - M \vec{V}_\Omega \times \vec{V}_c$$

se Ω è fisso o coincide con il c.d.m.

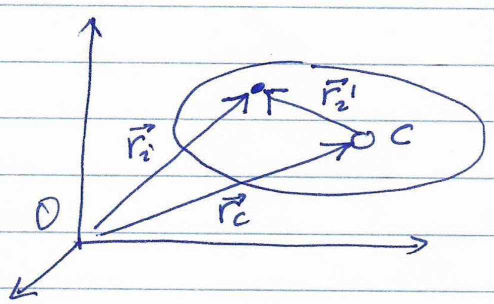
$$\boxed{\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Seconda equazione della dinamica dei sistemi

momento risultante di tutte le forze esterne

NB: rispetto al momento della q.d.m. non si può sostituire un sistema di punti con il centro di massa con tutta la massa M.

$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$ il momento angolare rispetto ad O è



$$\vec{P}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_c) \times \vec{q}_i =$$

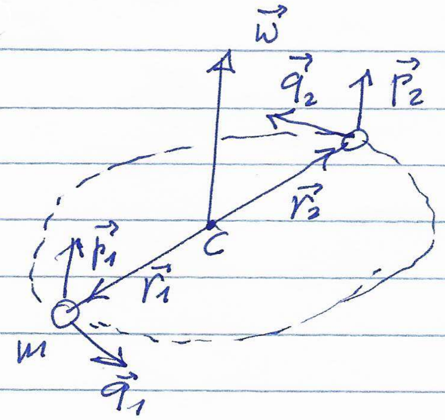
$$= \vec{P}_c + \vec{r}_c \times \vec{Q} = \vec{P}_c + \vec{r}_c \times M\vec{V}_c$$

$$\vec{P}_c = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{q}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times \vec{q}_i$$

è il momento angolare rispetto al c.d.m.

Il momento angolare rispetto ad un polo si può calcolare sommando quello rispetto al c.d.m. con il termine $\vec{r}_c \times M\vec{V}_c$

* terzo teorema del centro di massa



Due particelle connesse da una barretta

Momento angolare rispetto al C.d.m.

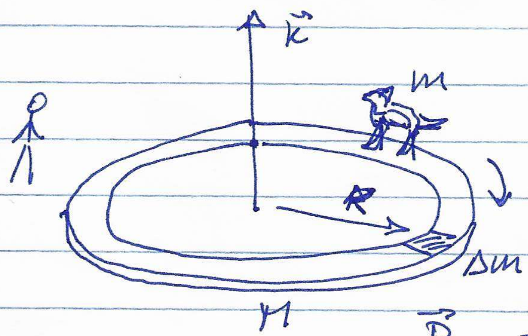
$$\vec{P}_C = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 = 2\vec{r}_1 \times m v_1 =$$

$$= 2mrv\vec{k} = 2\underset{m}{\pi} r^2 \omega \vec{k}$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

* La quantità di moto è nulla $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 0$

ma non il suo momento



L'anello è libero di ruotare

il cane si muove con v_0 rispetto all'anello

Il momento angolare del cane+anello è nullo e tale rimane

$$(= \vec{R} \times \vec{q})$$

$$\vec{P}_{cane} = mR^2\omega_c \vec{k} = mRv\vec{k} = mR(v_0 - \omega_a R)\vec{k}$$

$$\vec{P}_{anello} = -\sum_i \Delta m_i R^2 \omega_a \vec{k} = -MR^2\omega_a \vec{k}$$

$$mR(v_0 - \omega_a R) = MR^2\omega_a \rightarrow \omega_a = \frac{v_0}{R}\frac{m}{m+M}$$

$$v = v_0 - \omega_a R = v_0 \frac{M}{m+M}$$

vel. cane rispetto al pedone

$$\Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi R}{v_0}\frac{m+M}{M}$$

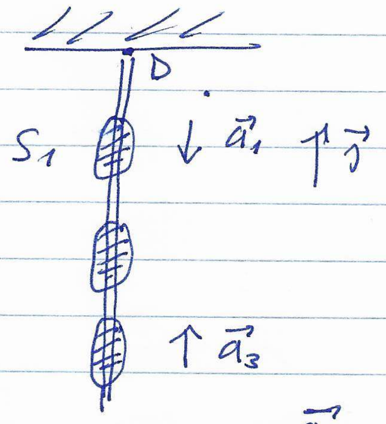
NB: se l'anello fosse fisso $\Delta t = \frac{\pi R}{v_0}$

Equazioni cardinali

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \\ M_{\Omega}^{(e)} = \dfrac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \end{cases}$$

$\vec{F}^{(e)}$ ed $\vec{M}_{\Omega}^{(e)}$ sono la risultante e il momento risultante delle forze esterne.

Equazioni cardinali della meccanica.
Valide nei sistemi inerziali.
Per quelli non inerziali si devono considerare anche le pseudoforze.



Tre scimmie S_1, S_2, S_3
$m_1 = 10\,Kg$, $m_2 = 15\,Kg$, $m_3 = 8\,Kg$
S_1 scende con accel $a_1 = 2\,m/s^2$
S_3 sale con $a_3 = 1.5\,m/s^2$
S_2 sale a velocità costante
Qual'è la tensione nel punto D

$$\vec{a}_1 = -a_1\vec{j} \;;\; \vec{a}_2 = \vec{0} \;;\; \vec{a}_3 = a_3\vec{j}$$

L'accelerazione del c.d.m. è

$$\vec{a}_c = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{-m_1a_1 + m_3a_3}{m_1+m_2+m_3}\vec{j}$$

$\vec{\Phi} = \Phi\vec{j}$ forza esercitata dal vincolo sul sistema fune+scimmie

Per la prima equazione cardinale

$$F^{(e)} = \Phi - (m_1+m_2+m_3)g = Ma_c = -m_1a_1 + m_3a_3$$

da cui si ottiene Φ. Per il principio di azione e reazione questo è uguale alla tensione della fune $T = 315\,N$.

In genere abbiamo:

Due ~~eq~~ eq. cardinali $\rightarrow$ 6 eq. scalari

n particelle la posizione implica $3n$ parametri scalari

Il numero dei parametri scalari indipendenti per determinare le posizioni di un sistema =

= numero dei gradi di libertà

Sole + Terra + Luna $\rightarrow$ 9 gradi di libertà è superiore alle equazioni scalari disponibili

Il problema dinamico dei tre corpi, non ha soluzione analitica perché le equazioni non permettono di ottenere le posizioni dei tre corpi come funzioni del tempo e dei dati iniziali.

Previsioni accurate da soluzioni numeriche

~~NB~~ NB: i sistemi rigidi hanno 6 gradi di libertà.

Sistemi isolati e terzo principio della dinamica

Per sistemi isolati

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \\ M^{(e)} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{Q} = \text{costante} \\ \vec{P} = \text{costante} \end{cases}$$

La conservazione di $\vec{P}$ è indipendente dal polo.

$$\vec{P}_\Omega = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{q}_i \quad ; \quad \vec{P}_{\Omega'} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega'}) \times \vec{q}_i$$

$$\vec{P}_{\Omega'} - \vec{P}_\Omega = (\vec{r}_\Omega - \vec{r}_{\Omega'}) \times \sum_i \vec{q}_i = (\vec{r}_\Omega - \vec{r}_{\Omega'}) \times \vec{Q}$$

$\vec{P}_\Omega$ e $\vec{Q}$ sono costanti e Ω e Ω' sono fissi

quindi anche $\vec{P}_{\Omega'}$ si conserva.

Terzo principio della dinamica: ~~Per~~ In un Rif. inerziale la q.d.m. $\vec{Q}$ e il momento angolare $\vec{P}$ (rispetto a qualunque polo Ω) si conservano per sistemi isolati.

Da cui segue il principio di azione e reazione

Consideriamo due particelle

$$\begin{cases} \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = cost \\ \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = cost \end{cases}$$

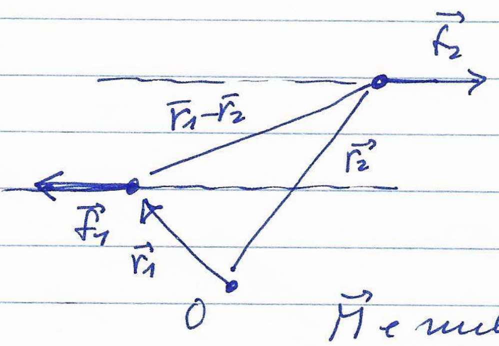
$$\frac{d\vec{q}_1}{dt} + \frac{d\vec{q}_2}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = 0$$

quindi $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$; $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$ (momenti angolari)

alla forza che agisce nel primo corpo corrisponde una forza nel secondo parallela e di verso opposto

(risultante le due forze devono agire sulla stessa retta di azione)

Due forze uguali e opposte aventi momento risultante nullo agiscono sulla stessa retta di azione



Se agiscono su rette // non coincidenti

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

(considerando che $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$)

$\vec{M}$ è nullo solo $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ sono // a $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ cioè le rette di azione coincidono.

Forze parallele e baricentro

Per un sistema rigido la risultante delle forze esterne e il momento risultante permettono di prevedere il moto

Quindi due sistemi di forze che hanno le stesse risultanti sono equivalenti

Caso delle forze parallele.

i.e. forza peso per un corpo non troppo grande

Questo sistema è equivalente ad una forza uguale alla risultante applicata in un punto che è il centro delle forze parallele.

$\vec{F}_i = f_i \vec{u}$ applicato in $\vec{r}_i$

Questo sistema è equivalente all'unica forza

$\vec{F} = \sum_i f_i \vec{u}$ applicata nel punto $\vec{r}_f = \dfrac{\sum_i f_i \vec{r}_i}{\sum_i f_i}$

Ovviamente la risultante è la stessa

Basta quindi dimostrare che hanno anche lo stesso momento risultante $\vec{M}$ rispetto ad un polo qualsiasi - i.e. Origine O.

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times f_i \vec{u}) = \left(\sum_i f_i \vec{r}_i\right) \times \vec{u} = \left(\sum_i f_i\right) \vec{r}_f \times \vec{u} = \vec{r}_f \times \vec{F} \quad \checkmark$$

NB: Il momento è uguale a quello della forza risultante, applicata in $\vec{r}_f$

nel caso delle forze peso $\vec{g} = -g\vec{k}$

$\vec{F}_i \equiv \vec{w}_i = m_i \vec{g} = -m_i g \vec{k} \rightarrow f_i = -m_i g$

equivalente alla forza $\vec{w} = M\vec{g}$ applicata nel punto

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \equiv \vec{r}_G$$

$\vec{w}$ = forza peso totale e $\vec{r}_G$ è il baricentro o centro di gravità

Se $\vec{g}$ è costante per tutto il sistema il baricentro coincide con il centro di massa.

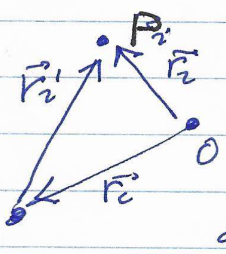
Anche per le pseudoforze associate ad una accelerazione di trascinamento il centro di queste forze coincide con il centro di massa.

13/04

Moto rispetto al centro di massa e teoremi di König

Prima eq. cardinale $\longleftrightarrow$ moto del c.d.m. in Rif. inerziale
Seconda eq. cardinale (momento) $\longleftrightarrow$ polo il c.d.m.
Moto rispetto al c.d.m. preso come origine – $\left[M^{(e)} = \frac{dP}{dt} \right]$

momento angolare totale



$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$$

dalla def. di c.d.m. $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$

derivando $\sum_i m_i \vec{v}_i{}' = \vec{Q}' = 0$ q.d.m. totale $= 0$

e inoltre $\sum_i m_i \vec{a}_i{}' = 0$

Consideriamo S' in moto di traslazione (no rotazione)
rispetto ad S con $\vec{v}_c$ (anche variabile)

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}' + \vec{v}_c \longrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c$$

Teoremi di König: relazioni tra S ed S'.

Momento angolare $\quad \vec{P}_c{}' = \vec{P}_c$

in quanto $\vec{P}_c{}' = \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' = \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i (\vec{v}_i - v_c) =$

$$= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times m_i \vec{v}_i - \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_c}_{=0} = P_c$$

Quindi il momento angolare rispetto al c.d.m. è una grandezza intrinseca del sistema, che non varia cambiando S.
(*) Momento angolare intrinseco.

Il terzo teorema del c.d.m. può essere espresso come

$$\vec{P}_o = \vec{P}_c{}' + \vec{r}_c \times \vec{Q}$$

invece di $\vec{P}_c$

Teorema di König per il momento angolare. V

Questa scrittura evidenzia la parte intrinseca (P_c') rispetto al c.d.m. e ~~ri~~ una che riguarda il moto del c.d.m.

i.e Terra rotazione e moto orbitale

$\uparrow$ intrinseca $\qquad$ $\uparrow$ moto del c.d.m.

N.B. Per le particelle elementari - spin - e momento orbitale

Per il moto traslatorio puro

$$\frac{d\vec{P}_c'}{dt} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = \vec{M}_c^{(e)}$$

→ validità della seconda eq. cardinale anche in S' (origine c.d.m.) anche se questo è in generale non inerziale

Il momento delle forze dipende ~~da~~ dal polo e non dal Rif

$$\vec{M}_c'^{(e)} = M_c^{(e)} \longrightarrow \frac{d\vec{P}_c'}{dt} = \vec{M}_c'^{(e)}$$

?

Quindi in S' si può utilizzare la seconda eq. cardinale considerando il momento delle forze esterne, senza preoccuparsi delle forze inerziali

---

Energia cinetica

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$ (en. cin. è estensiva) e dipende dal Rif

Relazione tra S e S'

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_c)(\vec{v}_i' + \vec{v}_c) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} M v_c^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_c}_{=0 \text{ vedi prima}}$$

$$\boxed{K = K' + \frac{1}{2} M v_c^2}$$

En. cinetica in S si può scrivere come la somma di K' (c.d.m.) e il termine $K_c = \frac{1}{2} M v_c^2$ che è l'en. di un punto con massa M rispetto a S.

* Teorema di König per l'en. cinetica (solo se $\omega = 0$) ?

NB: per en. cinetica e momento angolare non ci si può ridurre ad un punto

Dato che $K \geq K'$ il rif. S' è quello in cui l'en. cinetica è minima

Questa è anche una definizione del c.d.m.

Lavoro ed Energia

Generalizzazione del Teorema delle Forze Vive

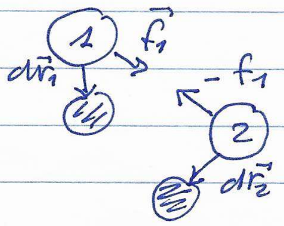
$$\delta L_i = dK_i$$

$$\delta L = \sum_i \delta L_i = \sum_i \delta L^{(e)} + \sum_i \delta L^{(i)} = \delta L^{(e)} + \delta L^{(i)} = dK$$

Il lavoro di tutte le forze è connesso a ΔK.

Lavoro delle Forze Interne

NB: le forze interne si bilanciano ma possono essere applicate a punti diversi.



Due particelle dr_1, dr_2 $\quad \vec f_1 = -\vec f_2 = -\vec f$

$$\vec r_{12} = \vec \rho = \vec r_2 - \vec r_1$$

Il lavoro delle forze interne

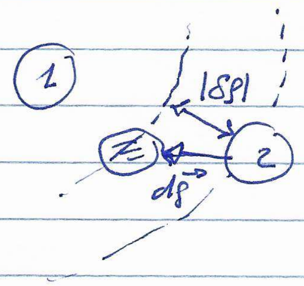
$$\delta L^{(i)} = \vec f_1 \cdot d\vec r_1 + \vec f_2 d\vec r_2 = \vec f (d\vec r_2 - d\vec r_1) = \vec f \cdot d\vec \rho$$

Essendo $\vec{f}$ diretta lungo $\vec{\rho}$ il lavoro $\delta L^{(i)}$ dipende dalla variazione del modulo di $\vec{\rho}$ (solo da r nelle forze centrali).

$$\delta L^{(i)} = f \, d|\vec{\rho}|$$

Quindi in generale il lavoro delle forze interne è $\neq 0$

È $= 0$ se la distanza non cambia come nei sistemi rigidi in cui $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cost$



$f^{(i)}$ possono essere sia conservative che non conservative

$$\delta L^{(i)} = \underbrace{\delta L^{(i;c)}}_{\text{conservative}} + \underbrace{\delta L^{(i;nc)}}_{\text{non cons.}}$$

$\delta L^{(i;c)}$ dipende dalla configurazione del sistema (coord. relative)

Nel caso di due punti solo ρ_{12}

$$\delta L^{(i;c)} = \delta L_1 + \delta L_2 = -dV_{12}(\rho_{12})$$

Per 3 particelle

$$\delta L^{(i;c)} = \delta L_{12} + \delta L_{23} + \delta L_{13} = -(dV_{12} + dV_{23} + dV_{13}) = -dV^{(i)}$$

quindi la relazione $\delta L^{(i;c)} = -dV^{(i)}$ vale nel caso di n particelle in cui $V^{(i)} = \sum_{k,j>k} V^{(i)}_{k,j}$ dipende da tutte le posizioni relative.

$V^{(i)}$ rappresenta l'en. potenziale interna

$$V^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k,j\neq k} V_{kj}$$

Energia meccanica, energia propria, energia interna

Forze esterne - conservative -
$V^{(e)}$ en. pot. esterna.

$$\delta L^{(e,nc)} - dV^{(e)} + \delta L^{(i,nc)} - dV^{(i)} = dK$$

(a) Separando forze conservative e non

$$d(K + V^{(i)} + V^{(e)}) = \delta L^{(nc)}$$

l'energia meccanica totale è

$$E_M = K + V^{(i)} + V^{(e)}$$

Si conserva in assenza di forze (int e est) non conservative

ma non è intrinseca perché comprende le interazioni con l'ambiente.

(b) Forze esterne (separano il sistema dall'ambiente)

$$d(K + V^{(i)}) - \delta L^{(i;nc)} = \delta L^{(e)}$$

Considerando come somma di componenti elementari $\delta L^{(i;nc)} = 0$

$$\delta L^{(e)} = d(K + V^{(i)}) \equiv d\underset{\substack{\uparrow \\ \text{energia propria}}}{E^{(0)}} = K + V^{(i)}$$

che è una caratteristica del sistema e si mantiene costante in assenza di lavoro dovuto a forze esterne.

L'en. cinetica dipende dal sistema di Rif.

$$E^{(0)} = K' + \frac{1}{2} M v_c^2 + V^{(i)} = U + K_c$$

ove

$$U = K' + V^{(i)} \quad \text{è l'energia interna}$$

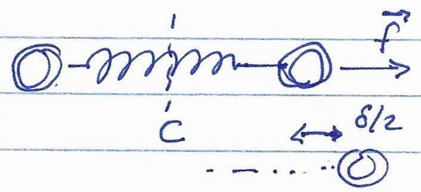
quindi si ha anche

$$dE^{(0)} = dU + dK_c = \delta L^{(e)} + \delta L^{(i,nc)}$$

quindi la variazione dell'en. cinetica del centro di massa (K_c) in generale non è uguale al lavoro complessivo delle forze esterne

Se le forze interne sono tutte conservative il lavoro delle forze esterne determina la variazione dell'energia propria non solo la variazione dell'en. cinetica del c.d.m. ma anche un cambio dell'energia interna.

Esempi

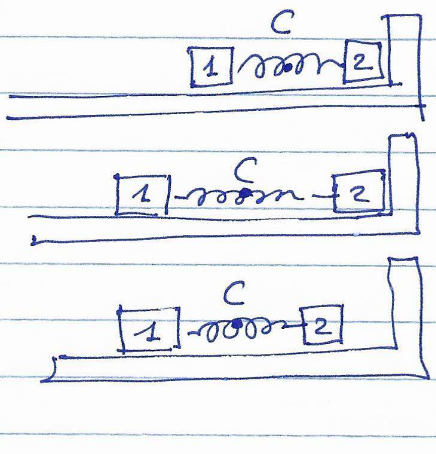


$$L^{(e)} = f\,\delta/2 + f\,\delta/2$$

$\vec{F}^{(e)} = 0$ si conserva la q.d.m. e la vel(=0) del c.d.m.

$$K_c = 0$$

Il lavoro delle forze applicate si trasforma completamente in variazione dell'energia interna $\Delta U = f\delta$



Inizialmente compressione δ

Poi viene rilasciata la compressione

All'inizio l'en propria consiste di quella interna e l'en. potenziale

$$E_{in} = U_{in} = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Quando il filo viene tagliato $\vec{R} = -\vec{f}_2$

reazione della parete

$\vec{R}$ compie lavoro nullo poiché il punto di applicazione è fermo quando la forza agisce.

Le forze interne sono conservative e l'en propria è costante

ma essendo $E^{(0)} = U + K_c$ si ha $\Delta U + \Delta K_c = 0$

Il c.d.m. acquista energia a spese dell'en. interna ΔU

En. interna $U = K' + V^{(2)}$ en pot + en. cinetica del c.d.m.

La conservazione dell'energia propria da

$$\Delta E^{(0)} = \Delta U + \Delta K_c = \Delta K' + \Delta V^{(2)} + \Delta K_c = 0$$

Il corpo ② si stacca dalla parete quando la molla raggiunge la propria lunghezza a riposo, $\vec{F}_2$ cambia verso ed $\vec{R} = 0$. A partire da questo punto la vel del c.d.m. e K_c ~~rest~~ restano costanti

Per il corpo ① acquista en. cinetica a spese della molla

$$\frac{1}{2} m v_1^{*2} = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Al momento del distacco $v_c^* = \frac{1}{2} v_1^*$

$$\Delta K_c = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_1^*}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} k \delta^2 = \frac{1}{2} U_{in}$$

e inoltre $\Delta V^{(2)} = -\frac{1}{2} k \delta^2$ da cui $\Delta K' = \frac{1}{4} k \delta^2$

Quindi l'en. interna si dimezza – trasformandosi da potenziale in cinetica. L'altra metà è trasferita al moto del centro di massa in modo da mantenere inalterata l'energia propria.

Forze gravitazionali (sulla terra)

$$V_k^{(e)} = m_k g z_k$$

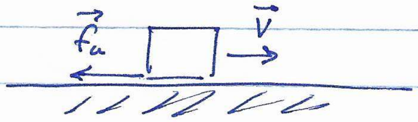
$$V^{(e)} = \sum_k V_k^{(e)} = g \sum_k m_k z_k$$

La quota del baricentro è $z_G = \frac{1}{M}\sum_k m_k z_k$

l'en. pot. gravitazionale è $V^{(e)} = M g z_G$

NB: l'en. di un sistema e la sua divisione in vari termini dipendono da cosa definiamo come sistema e da come lo descriviamo

e.g. corpo che viene lanciato su un piano scabro.



Se il sistema è definito dal corpo e dal piano l'attrito è una forza interna

Dal punto di vista macroscopico il sistema è composto da due oggetti con interazione dissipativa

Ma in realtà da un punto di vista microscopico la dissipazione corrisponde ad un trasferimento di energia in calore.

* I componenti elementari (atomi e molecole) interagiscono solo in modo conservativo.

Conservazione dell'energia totale.

* Principio di conservazione dell'energia: in un sistema isolato la somma di tutte le energie, in qualunque forma compaiono, è costante

14/09/2016

Pseudolavoro (problema è il punto di applicazione della forza)

Per un sistema il legame lavoro-energia è molto più complesso che per un punto

Ma la relazione tra il lavoro delle forze esterne e la variazione di en. cinetica del c.d.m. si può scrivere

$$dK_c = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}_c$$

che può apparire in contraddizione con $L^{(e)} \neq \Delta K_c$

$[\delta L^{(e)} = K + V^{(i)}]$

Vediamo:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \qquad K_c = \frac{1}{2}Mv_c^2 = \frac{\vec{Q}\cdot\vec{Q}}{2M}$$

$\rightarrow \quad dK_c = \vec{V}_c \cdot d\vec{Q}$

ma $\vec{V}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt}$ e per la I^a eq. cardinale $F^{(e)} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt}$

quindi $\quad dK_c = \vec{V}_c \cdot d\vec{Q} = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}_c$

In realtà la cosa si spiega con il fatto che, anche se $\vec{F}^{(e)}$ determina l'accelerazione del c.d.m. in generale non è applicata al c.d.m.

Quindi $\vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}_c$ rappresenta la variazione elementare di en. cinetica ma non esprime il lavoro di una forza: si chiama pseudolavoro

Quindi la relazione iniziale non è il Teorema delle Forze Vive.